Modelos Matemáticos en Mecánica

Francisco–Javier Sayas

Versión 2008

Introducción

La mayor parte de las ecuaciones de la mecánica de medios continuos y un buen número de problemas de la física se expresan en términos de ecuaciones en derivadas parciales, con distintos tipos de condiciones adicionales, sean condiciones iniciales, de contorno, de radiación,... En principio podríamos creer que el desarrollo de la teoría (y también de la aproximación numérica) de estos problemas consistirá en transferir a varias variables lo que sabemos para una, es decir, en hacer algún tipo de extensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias a las ecuaciones en derivadas parciales. Para quien nunca ha estudiado estas últimas ecuaciones, la sorpresa viene en la dificultad de encontrar una exposición general incluso de las ecuaciones en derivadas parciales más simples, las lineales. Mientras que la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (o la de sistemas lineales) es relativamente elemental, hay muchos enfoques posibles para mostrar resultados teóricos sobre ecuaciones en derivadas parciales lineales. Cada enfoque enfatiza un aspecto distinto y se puede decir con una cierta comodidad que ningún enfoque prueba todo ni sirve para todas las ecuaciones.

A lo largo de este curso nos vamos a ocupar de cuestiones bastante elementales sobre ecuaciones en derivadas parciales, mayoritariamente de problemas lineales de orden dos. Enmarcado como este curso está en un programa de Mecánica Computacional, el punto de vista va a buscar llegar a formulaciones que luego sirvan para la aproximación numérica, específicamente con métodos del tipo del Método de los Elementos Finitos. Nuestra preocupación principal va a ser escribir las ecuaciones de forma que podamos, si es posible, demostrar existencia de solución (algo que no es nada obvio incluso en las ecuaciones más simples), unicidad de solución y dependencia continua de los datos.

Las notas de este curso han pasado por varias fases. Hace varios años concebí un curso que entonces se llamó *Modelos matemáticos en EDP* y que estaba destinado a que estudiantes graduados de matemáticas pudieran conocer con rigor pero a una cierta rapidez las ecuaciones en derivadas parciales más importantes de la mecánica de medios continuos y su problemática. Porque se decidió en su momento incluir bastante material en poco tiempo (ese ha sido últimamente el estilo de muchos cursos de posgrado en España), realicé mi primera versión del curso y de las notas correspondientes con varios objetivos concretos muy simples:

- cada capítulo debería estudiar al menos una ecuación nueva que aparezca en mecánica o física de medios continuos,

- cada capítulo debería introducir una herramienta matemática nueva para analizar estas nuevas ecuaciones,

- en la medida de lo posible se evitarían demostraciones de resultados potentes pero complicados de análisis funcional, pero se reduciría el número de esos a un mínimo y se buscaría la forma de explotarlos al máximo y de presentarlos en la generalidad adecuada al problema[1],
- las meras extensiones a ecuaciones parecidas (desde el punto de vista matemático, que ni físico) se propondrían en una serie de proyectos/ejercicios.

Unos años después, la audiencia del curso cambió y pasó a ser casi íntegramente (cuando no completamente) de ingenieros superiores y graduados de ciencias no matemáticas, por lo que re–escribí una primera mitad de las notas (durante un tiempo solo he impartido medio curso) con un público menos ducho en matemáticas en mente. Esta versión vuelve a contener casi todo el material original, si bien organizado de una forma bien distinta[2]. No obstante, no he renunciado a los objetivos que me planteé al principio y pido al lector una cierta complicidad y capacidad de sacrificio para superar las barreras matemáticas que sin duda va a encontrar al principio.

Zaragoza/Minneapolis, 2007/2008

[1] Ni acercándonos tanto al problema como para perder de vista la generalidad del resultado ni alejándonos de forma que estuviéramos obligados a introducir conceptos que no iban a ser aprovechados en nuestro problema.

[2] En el camino se han quedado cuatro capítulos, que quizá algún día trasvase a este formato: la condición inf–sup, problemas mixtos, el problema de Stokes y desigualdades variacionales. Hay un segundo capítulo sobre la ecuación de ondas que también se ha quedado en la fase de proyecto.

Lección 1

Funciones generalizadas

El objetivo de este capítulo se puede expresar con una cierta simplicidad: vamos a aprender a derivar funciones que no son derivables a primera vista. Para ello, necesitaremos ampliar nuestro concepto de derivada de una forma razonable. El método se basa en una idea muy general de las matemáticas avanzadas: la dualidad. Al final de este capítulo encontraremos nuestras primeras ecuaciones en derivadas parciales formuladas en forma débil o variacional.

1. Funciones test

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ y sea $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define su **soporte** como el conjunto:

$$\operatorname{sop}\varphi := \text{clausura}\{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\},$$

es decir, como el conjunto de los puntos donde φ no se anula, *unido a la frontera del mismo*.

El conjunto $\mathcal{D}(\Omega)$ es el que se compone de las funciones $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que cumplen las dos siguientes condiciones:

- $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$
- $\operatorname{sop}\varphi$ es compacto (cerrado y acotado) y está estrictamente contenido en Ω.

La primera condición exige que φ y todas sus derivadas parciales de cualquier orden sean funciones continuas. La segunda, que la función sea no nula sólo en un conjunto acotado, que no puede aproximarse a la frontera de Ω. No nos vamos a molestar en construir ninguna función de $\mathcal{D}(\Omega)$, aunque hay muchas, como se comprobará en el resultado principal de esta sección. El papel de las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ va ser el de **funciones test**. Ellas no importarán en sí, sino su capacidad para *observar* a otras funciones.

Comentario. En este contexto las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ se llamarán funciones test, aunque este nombre no esté reservado a ellas: funciones test son siempre aquéllas que se emplean para 'testar' otras funciones. Esto quedará más o menos claro conforme avance el capítulo. $\square$

En el conjunto de las funciones indefinidamente derivables, el orden de derivación no es relevante. Así pues, son lo mismo

$$\partial_{x_1}(\partial_{x_2}\varphi) = \partial_{x_2}(\partial_{x_1}\varphi).$$

Por esta razón se va a emplear la notación con **multi–índices** para las derivadas. Escribiremos

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

y llamaremos multi–índice a

$$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$, denotaremos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d.$$

Por último, una derivada de orden α es

$$\partial^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Esta notación tiene además la siguiente comodidad:

$$\partial^\alpha(\partial^\beta \varphi) = \partial^{\alpha+\beta}\varphi.$$

Ejercicio. *¿Cómo escribirías en $\mathbb{R}^2$ las siguientes derivadas parciales en notación multi–indicial?*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial x}$$

Ejercicio. *Es bien sabido que si una función se anula en una parte del dominio cualquier derivada suya también se anula en esa misma parte del dominio. Emplea esta idea para que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces para cualquier α*

$$\operatorname{sop} \partial^\alpha \varphi \subseteq \operatorname{sop} \varphi.$$

Demuestra que entonces $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ para todo α.

La importancia del espacio de las funciones test viene justificada por el siguiente resultado que, en cierto modo, atestigua que hay muchas funciones test. La demostración de este resultado no es especialmente difícil pero requiere un cierto detalle de análisis matemático en el que no vamos a entrar.

Denotaremos

$$L^1(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_\Omega |f| < \infty \right\}$$

al espacio de las funciones integrables, llamado a veces espacio de Lebesgue. Nótese que muchas veces vamos a escribir

$$\int_\Omega |f| \qquad \text{en lugar de} \qquad \int_\Omega |f(\mathbf{x})| \mathrm{d}\mathbf{x},$$

aunque es la segunda notación la más satisfactoria. Hay un detalle importante al que prestaremos únicamente atención de forma intuitiva: las funciones de $L^1(\Omega)$ están definidas en casi todo punto o, como se dice en el argot correcto, salvo en conjuntos de medida nula. Esto extiende la idea de que funciones iguales salvo en un conjunto finito de puntos, o salvo en una línea (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$), etc son esencialmente la misma función. Las funciones van a estar siempre integradas de una forma u otra y cambiar el valor sobre estos conjuntos de medida nula no varía el valor de las integrales. Así, escribiremos que

$$f = g, \qquad \text{(ctp)}$$

cuando f y g coinciden salvo en un conjunto de medida nula. Igualmente $f = 0$, (ctp) cuando f es igual a cero salvo en un conjunto de medida nula. Repetimos la idea: *funciones que coinciden salvo en un conjunto de medida nula serán para nosotros la misma función.*[1]

Proposición (Lema variacional) *Sea* $f \in L^1(\Omega)$ *Entonces*

$$\int_\Omega f\,\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

si y solo si

$$f = 0 \qquad \text{(ctp)}.$$

Ejercicio. *Vamos a generalizar el resultado anterior. Consideremos el conjunto de las funciones localmente integrables.*

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, f \in L^1(\mathcal{O}), \text{para todo } \mathcal{O} \text{ acotado}, \overline{\mathcal{O}} \subset \Omega\}.$$

Vamos a admitir el siguiente hecho: $f = 0$ (ctp) *si y sólo si* $f = 0$ *en casi todo punto de* $\mathcal{O}$ *para todo* $\mathcal{O}$ *acotado tal que* $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. *Demuestra los siguientes hechos:*

(a) Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *entonces para todo* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *se tiene que* $f\,\varphi \in L^1(\Omega)$.

(b) Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *y*

$$\int_\Omega f\,\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

entonces $f = 0$ (ctp).

(c) Si $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega f\,\varphi = \int_\Omega g\,\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = g \;\; \text{(ctp)}.$$

[1]Para el *casi todo punto* hay muchas posibilidades y preferencias: hay quien lo escribe en inglés (a.e.= almost everywhere), otros en francés (p.p.= presque partout) y otros en un español más pulido (c.p.d.= casi por doquier).

Este resultado tiene mucha importancia: dice que para observar si dos funciones son la misma función (salvo en conjuntos de medida nula) basta mirar todas las integrales

$$\int_{\Omega} f\,\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Terminamos la sección con el muy exigente concepto de **convergencia en $\mathcal{D}(\Omega)$**. Si tenemos una sucesión $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ decimos que φ_n converge a φ en $\mathcal{D}(\Omega)$, y escribiremos

$$\varphi_n \to \varphi, \qquad \text{en } \mathcal{D}(\Omega)$$

si:

- existe un compacto K contenido en Ω tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{sop}\varphi_n &\subseteq K, \qquad \forall n,\\ \operatorname{sop}\varphi &\subseteq K, \end{aligned}$$

- para todo α, $\partial^\alpha\varphi \to \partial^\alpha\varphi$ uniformemente en K (y por tanto en Ω), esto es,

$$\max_{\mathbf{x}\in\Omega}\Big|(\partial^\alpha\varphi_n)(\mathbf{x}) - (\partial^\alpha\varphi)(\mathbf{x})\Big| \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La segunda condición es la convergencia uniforme de todas las derivadas de la sucesión de funciones. La primera exige que los soportes de las funciones dejen de moverse, impidiendo que se aproximen progresivamente a la frontera de Ω o que se vayan yendo a infinito.

2. Distribuciones

Una **distribución** en Ω es una aplicación lineal:

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \varphi & \longmapsto & \langle T, \varphi\rangle \end{array}$$

tal que la convergencia de una sucesión de funciones

$$\varphi_n \to \varphi, \qquad \text{en } \mathcal{D}(\Omega)$$

implica la convergencia de los valores de T aplicada a la misma

$$\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle, \qquad \text{en } \mathbb{R}.$$

Al conjunto de las distribuciones se le denota $\mathcal{D}'(\Omega)$ y se le llama **espacio de las distribuciones sobre Ω**.

Comentario. La notación $\mathcal{D}'(\Omega)$ (es decir, añadir un $'$ al conjunto $\mathcal{D}(\Omega)$) es habitual para denotar al espacio dual de un espacio dado, esto es, al conjunto de las aplicaciones lineales y continuas del espacio en $\mathbb{R}$. En nuestra definición el conjunto $\mathcal{D}(\Omega)$ viene acompañado de un concepto de convergencia y su pretendido dual es el conjunto de las aplicaciones lineales que preservan la convergencia de sucesiones. No es nada trivial, pero sí es cierto, ver que existe una topología en $\mathcal{D}(\Omega)$ de forma que: (a) el concepto de convergencia de sucesiones es el dado; (b) una aplicación lineal es continua si y sólo sí es continua por sucesiones. Si no sabes qué es una topología, ignora este comentario. □

Para la acción de una distribución sobre una función test (esto es, el valor de la aplicación lineal en la función test concreta) emplearemos la notación

$$\langle T, \varphi \rangle \qquad \text{o bien} \qquad \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}.$$

El argumento de la izquierda será siempre la distribución y el de la derecha la función test.

El ejemplo más trivial de distribución es la **delta de Dirac** (o impulso de Dirac, o masa de Dirac, todo depende del contexto): si $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, se define $\delta_{\mathbf{x}_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle \delta_{\mathbf{x}_0}, \varphi \rangle := \varphi(\mathbf{x}_0).$$

Dem. Vamos a ver que $\delta_{\mathbf{x}_0}$ es en efecto una distribución. La linealidad es bastante obvia, pero la vamos a mostrar por una vez. Sean φ_1 y φ_2 elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$ y λ_1, λ_2 números reales. Entonces la igualdad (que no es más que la definición de combinación lineal de funciones)

$$(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \varphi_1(\mathbf{x}_0) + \lambda_2 \varphi_2(\mathbf{x}_0)$$

se puede reescribir como

$$\langle \delta_{\mathbf{x}_0}, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \delta_{\mathbf{x}_0}, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \delta_{\mathbf{x}_0}, \varphi_2 \rangle,$$

lo cual demuestra la linealidad de la aplicación. Si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} |\langle \delta_{\mathbf{x}_0}, \varphi_n \rangle - \langle \delta_{\mathbf{x}_0}, \varphi \rangle| &= |\varphi_n(\mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x}_0)| \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

luego $\langle \delta_{\mathbf{x}_0}, \varphi_n \rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \delta_{\mathbf{x}_0}, \varphi \rangle$. □

Se pueden definir muchas distribuciones con este aspecto (luego veremos algunas en los ejercicios). No obstante, la clave es que podemos entender muchas funciones como distribuciones, en concreto todas las funciones localmente integrables. Sea así

$$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\Big|\, f \in L^1(\mathcal{O}), \text{para todo } \mathcal{O} \text{ acotado}, \overline{\mathcal{O}} \subset \Omega \Big\}.$$

Definimos la siguiente aplicación lineal $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (que llamamos igualmente f; luego veremos por qué podemos hacer esto):

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_\Omega f\, \varphi.$$

Es muy importante tener en cuenta todo lo que sigue:

- La integral anterior es siempre válida, ya que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, entonces $f\varphi \in L^1(\Omega)$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- La aplicación anterior es lineal. Esta va a ser la última vez que chequeamos esta propiedad. Sean de nuevo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle &= \int_\Omega f\,(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 \int f\,\varphi_1 + \lambda_2 \int_\Omega f\,\varphi_2 \\ &= \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle\end{aligned}$$

  y el resultado ya está probado.
- La aplicación preserva la continuidad de sucesiones. Vamos a ello. Si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces existe un compacto contenido en K de forma que

$$\begin{aligned}\operatorname{sop}\varphi_n &\subseteq K, \qquad \forall n, \\ \operatorname{sop}\varphi &\subseteq K.\end{aligned}$$

  Las funciones $f\,\varphi_n$ se anulan fuera de K (es φ_n la que se anula), luego

$$\begin{aligned}|\langle f, \varphi_n\rangle - \langle f, \varphi\rangle| &= \Big|\int_\Omega f\,(\varphi_n - \varphi)\Big| = \Big|\int_K f\,(\varphi_n - \varphi)\Big| \\ &\leq \int_K |f|\,|\varphi_n - \varphi| \\ &\leq \left(\int_K |f|\right) \max_{\mathbf{x}\in\Omega} |\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

- Gracias al lema variacional, si vemos dos funciones localmente integrables como distribuciones y coinciden en ese sentido, es decir, si

$$\int_\Omega f\,\varphi = \langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle = \int_\Omega g\,\varphi, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

  necesariamente $f = g$, (ctp). Esto quiere decir que dos funciones distintas (una vez más: en algo más que un conjunto de medida nula) definen distribuciones distintas. Por eso podemos entender una función localmente integrable, sea como ella misma (la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$) o como distribución, esto es, mirando los valores

$$\int_\Omega f\,\varphi, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Recordatorio. Antes hemos aplicados dos desigualdades que bien viene refrescar: para toda función $g \in L^1(\mathcal{O})$

$$\Big|\int_\mathcal{O} g\Big| \leq \int_\mathcal{O} |g|$$

y si h es una función acotada en $\mathcal{O}$,

$$\int_\mathcal{O} |g\,h| \leq \left(\int_\mathcal{O} |g|\right) \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{O}} |h(\mathbf{x})|.$$

$\square$

Hay un detalle terminológico más que hay que tener en cuenta. Decimos que una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es una función si existe una función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tal que $T = f$ como distribución, o lo que es lo mismo

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f\, \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

No todas las distribuciones son funciones. Por ejemplo las deltas de Dirac no son funciones. Hay, de hecho, muchas más distribuciones que no son funciones que distribuciones que sí son funciones.

Comentario. En el argot de las distribuciones, a las distribuciones definidas a partir de funciones localmente integrables se les llama **distribuciones regulares**. $\square$

Ejercicio. *En $\mathbb{R}^d$ (con $d \geq 2$), demuestra que*

$$\phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{|\mathbf{x}|}$$

*es integrable sobre cualquier conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \mathbf{x} \leq R\}$ (**ayuda:** pasa a coordenadas polares, aprovechando que la función no depende más que del radio). Deduce que ϕ es localmente integrable, luego define una distribución.*

Ejercicio. *Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de Ω. Demuestra que*

$$\varphi \quad \longmapsto \quad \int_{\mathcal{O}} \varphi$$

es una distribución. ¿Corresponde a una función? ¿A cuál?

Ejercicio. **(*)** *Sea Γ una curva en $\mathbb{R}^2$ (o una superficie en $\mathbb{R}^3$). Si escribimos $\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x})$ para el elemento de longitud (o de área) en Γ, demuestra que*

$$\langle \delta_\Gamma, \varphi \rangle := \int_\Gamma \varphi(\mathbf{x}) \mathrm{d}\gamma(\mathbf{x})$$

define una distribución. Este tipo de distribuciones tampoco está asociado a funciones.

3. Derivación de distribuciones

La razón principal del empleo de distribuciones en el mundo de las ecuaciones en derivadas parciales (y por ello en la mecánica de medios continuos) es la posibilidad de derivar indefinidamente cualquier distribución. Gracias a ello estaremos autorizados a derivar todas las funciones localmente integrables. Advertencia: lo que obtendremos al derivar una función *en el sentido de distribuciones* será una distribución que posiblemente no corresponda a ninguna función. Esto va a ser al principio el objeto de unos cuantos quebraderos de cabeza notacionales.

Comenzamos con las derivadas parciales. Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos $\partial_{\mathbf{x}_i} T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$\langle \partial_{x_i} T, \varphi \rangle := -\langle T, \partial_{x_i} \varphi \rangle.$$

Ya hemos visto que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces cualquier derivada suya (en particular $\partial_{x_i}\varphi$) está en $\mathcal{D}(\Omega)$. Así pues, $\partial_{x_i} T$ está bien definido. De nuevo, es trivial ver que esta aplicación es lineal. Más: si

$$\varphi_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \text{ en } \mathcal{D}(\Omega),$$

entonces

$$\partial_{x_i}\varphi_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial_{x_i}\varphi \text{ en } \mathcal{D}(\Omega),$$

(aún más, $\partial^\alpha \varphi_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial^\alpha$), luego

$$\langle \partial_{x_i} T, \varphi_n \rangle = -\langle T, \partial_{x_i}\varphi \rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\langle T, \partial_{x_i}\varphi \rangle = \langle \partial_{x_i} T, \varphi \rangle.$$

Comentario. Puede resultar extraño a primera vista el cambio de signo que aparece en la definición. Obedece al siguiente hecho. Si f es una función de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ (luego tanto f como $\partial_{x_i} f$ son localmente integrables y pueden ser vistas como distribuciones), entonces aprovechando que $f\,\varphi$ es nulo al aproximarnos a la frontera de Ω, tenemos que

$$0 = \int_\Omega \partial_{x_i}(f\,\varphi) = \int_\Omega (\partial_{x_i} f)\,\varphi + f\,(\partial_{x_i}\varphi)$$

y por tanto

$$\langle \partial_{x_i} f, \varphi \rangle = \int_\Omega (\partial_{x_i} f)\,\varphi = -\int_\Omega f\,(\partial_{x_i}\varphi) = -\langle f, \partial_{x_i}\varphi \rangle.$$

Así, el cambio de signo era necesario para ser coherentes con la derivación ya existente de funciones. □

Recordatorio. Si $g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ y la frontera de Ω (que denotaremos Γ) es suficientemente regular (entraremos en este tipo de conceptos en un capítulo posterior), entonces

$$\int_\Omega (\partial_{x_i} g)(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Gamma g(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x})\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x}),$$

donde $n_i(\mathbf{x})$ es la $i-$ésima componente del vector normal exterior en el punto $\mathbf{x} \in \Gamma$. De este resultado se deduce el conocido teorema de la divergencia (teorema de Gauss)

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^d \int_\Omega (\partial_{x_i} g_i)(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^d \int_\Gamma g_i(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x})\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x}) = \int_\Gamma \mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x}).$$

□

Con funciones, las segundas derivadas (parciales) se definen como primeras derivadas de las primeras derivadas. Con distribuciones las derivadas se hacen de golpe: para cualquier multi–índice α y cualquier $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se define la **derivada** $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mediante la regla

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

- Hay que cambiar una vez el signo por cada derivación parcial; de allí el signo $(-1)^{|\alpha|}$.
- En $\mathcal{D}(\Omega)$ el orden de derivación es irrelevante (gracias a eso la notación con multi–índices tiene sentido), de allí que en $\mathcal{D}'(\Omega)$ lo sea también.
- Derivar es una operación lineal en $\mathcal{D}'(\Omega)$: si T_1, T_2 son distribuciones y $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha(\xi_1 T_1 + \xi_2 T_2), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle \xi_1 T_1 + \xi_2 T_2, \partial^\alpha \varphi\rangle \\
&= \xi_1(-1)^{|\alpha|}\langle T_1, \partial^\alpha\varphi\rangle + \xi_2(-1)^{|\alpha|}\langle T_2, \partial^\alpha\varphi\rangle \\
&= \langle \xi_1 \partial^\alpha T_1 + \xi_2 \partial^\alpha T_2, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

  Dicho de otro modo,

$$\partial^\alpha(\xi_1 T_1 + \xi_2 T_2) = \xi_1 \partial^\alpha T_1 + \xi_2 \partial^\alpha T_2.$$

- Se cumple trivialmente la regla de composición

$$\partial^\alpha(\partial^\beta T) = \partial^{\alpha+\beta} T.$$

Ejercicio. *Demostrar la regla de composición.*

Vamos seguidamente con tres simples **ejemplos unidimensionales**. Vamos a considerar distribuciones en toda la recta real $\mathbb{R}$. Consideremos la función escalón

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

El valor en $x = 0$ es irrelevante (¿por qué?). Entonces

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

En el lenguaje de las distribuciones

$$H' = \delta_0.$$

Hazte un dibujo de H para intentar comprender gráficamente qué hemos obtenido aquí.

La siguiente derivada se puede calcular empleando que $H'' = (H')' = \delta_0'$ y viendo que

$$\langle \delta_0', \varphi\rangle = -\langle \delta_0, \varphi'\rangle = -\varphi'(0),$$

que es otro tipo distinto de distribución de Dirac, que evalúa la derivada en lugar de la función.

Tomemos ahora la función

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ 1-x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dibuja la función antes que nada. Entonces, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle \\
&= -\int_{-1}^{0} (x+1)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} (1-x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} \varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Es fácil identificar entonces f' con la siguiente función (vista como distribución):

$$g(x) := \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ -1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función g no es más que la derivada punto a punto de f. Esta derivada no existía realmente en tres puntos (0, 1 y -1) pero sí existían sus límites laterales. La diferencia con el caso anterior (la función escalón) es que no hay discontinuidades. Si derivamos otra vez obtendremos

$$f'' = g' = \delta_{-1} - 2\,\delta_0 + \delta_1.$$

Este par de derivadas te puede dar una idea de cómo se derivan funciones que son derivables a trozos. Mientras la función es continua, la derivada se obtiene simplemente pegando los trozos de derivadas. En cuanto hay saltos finitos, se añaden deltas de Dirac proporcionales a la magnitud del salto.

Ejercicio. *Considera la función* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi\, x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcula su primera, segunda y tercera derivada en el sentido de distribuciones.

Ejercicio. **(*)** *Considerar la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{máx}_{|x_i|} < 1, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $\partial_x f$, $\partial_y f$ *y* $\partial_{xy} f$.

4. Algunos operadores en derivadas parciales

La posibilidad de derivar indefinidamente casi cualquier función (de hecho las funciones localmente integrables) nos permite entender las ecuaciones en derivadas parciales de una forma mucho más general que con el concepto clásico de derivación.

Comentario. Uno se puede preguntar para qué generalizar los conceptos de solución de ecuaciones en derivadas parciales. Hay dos razones principales:

- Incluso con problemas de contorno en dimensión uno, la teoría de existencia y unicidad no es tan limpia como la de problemas de valor inicial. Muchas veces, hasta en problemas muy elementales, no se consigue demostrar que exista solución clásica (no porque no se sepa demostrar, si no porque no existe).

- En el mundo de los problemas físicos (reales) los coeficientes discontinuos o los datos discontinuos son parte normal del problema. En una teoría clásica este tipo de singularidades tiene muy difícil encaje. Con el enfoque que adoptaremos, muchos problemas de este tipo se plantean de una forma natural.

En todo caso, resalto aquí un hecho: *no hay ninguna teoría completa y satisfactoria para analizar todos los aspectos de todas las ecuaciones en derivadas parciales.* Para cada tipo de ecuación y cada tipo de propiedad que se quiere demostrar hace falta una u otra teoría. Son complementarias. Nuestro enfoque es el que de forma más fácil lleva al método de los elementos finitos. □

Recordatorio. El operador de Laplace o **laplaciano** es el operador

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i x_i} u.$$

Tradicionalmente la **ecuación de Laplace** es la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\Delta u = 0.$$

Cuando la ecuación es no homogénea

$$-\Delta u = f$$

(el signo menos se toma por comodidad; lo iremos viendo) se suele llamar **ecuación de Poisson**. □

Cuando escribimos

$$-\Delta u = f, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

(a veces pondremos simplemente $-\Delta u = f$ en Ω) no esperamos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sea una función con dos derivadas parciales. Nos basta con que u sea una función (esto ni siquiera es implícito en la ecuación) y que

$$-\int_\Omega u\,(\Delta\varphi) = \int_\Omega f\,\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ya que

$$-\int_\Omega u\,(\Delta\varphi) = -\langle y, \Delta\varphi\rangle = \langle \Delta u, \varphi\rangle.$$

Así hemos llegado a una de las **formas débiles** de la ecuación en derivadas parciales $-\Delta u = f$. Habitualmente buscaremos otras formulaciones, exigiendo algo más de derivabilidad a u y repartiendo mejor las derivadas entre u y φ.

Ejercicio. *Supongamos que*

$$u, \partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_d} u, f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Demuestra que

$$-\Delta u + u = f, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

equivale a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\,\varphi = \int_\Omega f\,\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ejercicio. *Supongamos que*

$$u, \partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_d} u, f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

y sea **b** *un vector constante. Demostrar que*

$$-\Delta u + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

equivale a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega (\mathbf{b}\cdot\nabla u)\,\varphi = \int_\Omega f\,\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

y también a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\,(\mathbf{b}\cdot\nabla \varphi) = \int_\Omega f\,\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Recordatorio. Como consecuencia del teorema de la divergencia (aplicado a pares de funciones $u\,(\partial_{x_i} v)$ y $(\partial_{x_i} u)\,v$, se obtiene la **segunda fórmula de Green**: si $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathcal{O}})$, entonces

$$\int_{\mathcal{O}} u(\Delta v) - (\Delta u)\,v = \int_{\partial\mathcal{O}} u\,(\partial_\nu v) - (\partial_\nu u)\,v$$

siendo $\partial_\nu u := \nabla u \cdot \mathbf{n}$ la derivada normal (exterior) en la frontera de $\mathcal{O}$, que hemos denotado $\partial\mathcal{O}$.
□

Un ejemplo complicado. Vamos a realizar una derivada algo más compleja. En $\mathbb{R}^3$ consideremos la función

$$\phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{x}|}$$

que define una distribución, ya que es localmente integrable. En un sentido clásico, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se tiene que

$$(\Delta\phi)(\mathbf{x}) = 0.$$

Esto implica que $\Delta\phi = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\})$ pero no en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ como veremos seguidamente. Tomemos $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ arbitraria (pero fija a partir de ahora) y $R > 0$ suficientemente grande de forma que

$$\operatorname{sop}\varphi \subset \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; |\mathbf{x}| < R \Big\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \Delta\phi, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x})(\Delta\varphi)(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{|\mathbf{x}|<R} \phi(\mathbf{x})(\Delta\varphi)(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|\mathbf{x}|<R} \phi(\mathbf{x})(\Delta\varphi)(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{x})\, \partial_\nu\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x}) - \int_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} \partial_\nu\phi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x})\right]
\end{aligned}$$

El primer sumando tiende a cero, ya que

$$\int_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} \phi(\mathbf{x})\, \partial_\nu\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} \partial_\nu\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x})$$

y el área del conjunto $\{\mathbf{x} \,|\, |\mathbf{x}| = \varepsilon\}$ es $4\pi\varepsilon^2$. Por otra parte, sobre esta superficie, la derivada normal exterior (¡que va hacia el interior!) de ϕ tiene el valor constante

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2},$$

de donde se deduce que

$$-\int_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} \partial_\nu\phi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} \varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}\gamma(\mathbf{x}) \to -\varphi(\mathbf{0}).$$

Así,

$$\langle \Delta\phi, \varphi\rangle = -\varphi(\mathbf{0}), \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3),$$

o, dicho de otro modo,

$$-\Delta\phi = \delta_0.$$

A ϕ se le llama una solución fundamental o función de Green en el espacio libre para el operador $-\Delta$.

Ejercicio. (*) *Repite la misma argumentación para ver que la función*

$$\phi(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2\pi} \log|\mathbf{x}|$$

en $\mathbb{R}^2$ *cumple* $-\Delta\phi = \delta_0$.

Ejercicio. (*) *Repite la misma argumentación para ver que la función*

$$\phi_k(\mathbf{x}) := \frac{e^{-k|\mathbf{x}|}}{4\pi\,|\mathbf{x}|},$$

cumple

$$\Delta\phi_k + k^2\phi_k = \delta_0, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

5. Un espacio de Sobolev

El espacio de las funciones de cuadrado integrable se denota $L^2(\Omega)$, esto es,

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &:= \Big\{ f:\Omega\to\mathbb{R} \,\Big|\, \int_\Omega |f|^2 < \infty \Big\} \\ &= \Big\{ f:\Omega\to\mathbb{R} \,\Big|\, |f|^2 \in L^1(\Omega) \Big\}. \end{aligned}$$

Como antes, identificamos como la misma función al grupo de funciones que difieren únicamente en un conjunto de medida nula.

Recordatorio. La llamada **desigualdad de Cauchy–Schwarz** [2] dice que

$$\Big| \int_{\mathcal{O}} f\, g \Big| \le \Big(\int_{\mathcal{O}} |f|^2 \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathcal{O}} |g|^2 \Big)^{1/2}.$$

En particular, dice que si $f, g \in L^2(\Omega)$, se tiene que su producto está en $L^1(\Omega)$. $\square$

Si $f \in L^2(\Omega)$ y $\mathcal{O}$ es un subconjunto acotado de Ω (ni siquiera nos hace falta que $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$ para este razonamiento), entonces

$$\int_{\mathcal{O}} f \le \Big(\int_{\mathcal{O}} |f|^2 \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathcal{O}} \mathrm{d}\mathbf{x} \Big)^{1/2} = (\mathrm{vol}\mathcal{O})^{1/2} \Big(\int_{\mathcal{O}} |f|^2 \Big)^{1/2} \le (\mathrm{vol}\mathcal{O})^{1/2} \Big(\int_{\Omega} |f|^2 \Big)^{1/2},$$

luego $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y, por tanto, define una distribución.

Dado un abierto Ω definimos el siguiente **espacio de Sobolev**[3]

$$H^1(\Omega) := \Big\{ f \in L^2(\Omega) \,\Big|\, \partial_{x_i} f \in L^2(\Omega)\, i = 1, \ldots, d \Big\}.$$

Recalquemos que al escribir $\partial_{x_i} f \in L^2(\Omega)$ queremos decir que $\partial_{x_i} f$ (que es una distribución) es una función y que esta función es de cuadrado integrable. Dicho de otro modo, para cada i, existe una función $g_i \in L^2(\Omega)$ de forma que

$$\int_\Omega f\,(\partial_{x_i}\varphi) = -\int_\Omega g\,\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Escribimos entonces $\partial_{x_i} f = g_i$ y olvidamos la función g_i.

Ejercicio. *Demuestra que si Ω es acotado, entonces $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ y, por tanto, $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.*

[2] En realidad ésta es un caso particular de desigualdades de Cauchy–Schwarz que veremos en el próximo capítulo

[3] Una cuestión terminológica: los espacios de Sobolev forman una colección bastante amplia de espacios de funciones, pero son unos espacios concretos. Más adelante hablaremos de espacios de Hilbert: ser o no ser *de Hilbert* es una propiedad de un espacio, mientras que *de Sobolev* es el nombre de una familia de espacios. El espacio $H^1(\Omega)$ sólo es uno de ellos. Y además es espacio de Hilbert, para terminar de complicarlo.

Recordatorio. La convergencia en media cuadrática (también llamada convergencia en L^2) de una sucesión de funciones está definida de la siguiente forma:

$$\int_\Omega |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Veremos algo más sobre ella en el próximo capítulo. □

Supongamos que $v \in H^1(\Omega)$ cumple la siguiente propiedad:

existe una sucesión $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ de manera que

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_n - \nabla v|^2 + \int_\Omega |\varphi_n - v|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

es decir,

> *existe una sucesión $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ de manera que φ_n converge a v en media cuadrática y $\partial_{x_i}\varphi_n \to \partial_{x_i} v$ en media cuadrática para todo i.*

En este caso, decimos que $v \in H_0^1(\Omega)$. Veremos más cosas sobre este espacio más adelante. Por ahora nos basta con su definición. Es trivial que $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ (¿por qué?).

Sean entonces $u \in H^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$. Entonces

$$-\Delta u = f, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

(nótese que a priori las segundas derivadas de u no tienen por qué ser funciones, basta con que lo sea Δu) si y sólo si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\,\varphi, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Sea entonces $v \in H_0^1(\Omega)$ y tomemos una sucesión (φ_n) con la propiedad de convergencia indicada antes. Entonces:

$$\left|\int_\Omega f\,\varphi_n - \int_\Omega f\,v\right| \le \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\varphi_n - v|^2\right)^{1/2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

y también

$$\left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_n - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\right| \le \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi_n - \nabla v|^2\right)^{1/2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(¿Tienes claro que todas las integrales anteriores son correctas?). Así

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_n = \int_\Omega f\,\varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f\,v.$$

Esto quiere decir que si $u \in H^1(\Omega)$ la ecuación

$$-\Delta u = f, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

equivale a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Esto es casi una formulación variacional, pero todavía falta por incorporar o interpretar las condiciones de contorno. Habrá que esperar a los próximos capítulos.

Ejercicio. *Sea $u \in H^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$. Demuestra que la* **ecuación de reacción–difusión**

$$-\Delta u + u = f$$

equivale a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ejercicio. *Sea $u \in H^1(\Omega)$. Demuestra que la* **ecuación de Helmholtz**

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0$$

equivale a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega \lambda^2 u\, v = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Lección 2

El lema de Lax–Milgram

En este capítulo vamos a estudiar resultados de existencia y unicidad para problemas de contorno para ecuaciones en derivadas parciales elípticas de segundo orden. El marco de estudio será el de los problemas variacionales abstractos en espacios de Hilbert. Este contexto permite demostrar fácilmente existencia de solución: la unicidad suele ser mucho más fácil de probar para este tipo de problemas y es la existencia la que plantea la exigencia de encontrar el espacio de funciones adecuado. Además de esta simplicidad, la formulación variacional o débil de los problemas de contorno es el punto de partida para el método de los elementos finitos, que arranca desde este tipo de formulaciones y no del problema de contorno en sí.

1. Espacios de Hilbert

Dicho en breve, un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial con un producto escalar de forma que el espacio es completo con la norma asociada. Vamos poco a poco. Sea H un espacio vectorial. Un producto escalar es una aplicación

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\,:\,H\times H\to\mathbb{R}$$

que cumple:

$$\begin{array}{l}
(u,v)=(v,u),\qquad \forall u,v\in H,\\
(\alpha\,u+\beta\,v,w)=\alpha\,(u,w)+\beta\,(v,w),\qquad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad u,v,w\in H,\\
(u,u)\geq 0,\qquad \forall u\in H,\\
(u,u)=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad u=0.
\end{array}$$

La norma asociada al producto escalar está definida como

$$\|u\|=\sqrt{(u,u)}.$$

Se dice que una sucesión (u_n) es de Cauchy en H cuando

$$\|u_n-u_m\|\stackrel{n,m\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Un espacio es completo cuando todas sus sucesiones de Cauchy son convergentes, es decir, si (u_n) es de Cauchy, existe $u \in H$ tal que

$$\|u_n - u\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

El ejemplo más característico de espacio de Hilbert es

$$L^2(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, \int_\Omega |f|^2 < \infty\}$$

donde el producto escalar es

$$(f, g) := \int_\Omega f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Como en ocasiones anterior (y siempre a partir de ahora) hay que considerar que las funciones que coinciden salvo en un conjunto de medida nula son la misma función. Que la expresión de (f, g) define un producto escalar es fácil de probar: nótese el siguiente detalle

$$(f, f) = \int_\Omega |f|^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f = 0 \text{ (ctp)}$$

($f = 0$ (ctp) en $L^2(\Omega)$ es exactamente $f = 0$ como función). La completitud no es tan obvia y no es del todo fácil de probar. En este contexto, la completitud dice que si tenemos una sucesión $(f_n) \subset L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |f_n - f_m|^2 \quad \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

entonces existe $f \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |f_n - f|^2 \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Como se ve, la convergencia en $L^2(\Omega)$ es precisamente la **convergencia en media cuadrática**.

Recordatorio. En todo espacio con producto escalar se cumple la siguiente desigualdad:

$$|(u, v)| \le \|u\|\,\|v\|, \qquad u, v \in H.$$

Esta desigualdad se suele llamar **desigualdad de Cauchy–Schwarz**. Es una igualdad si y sólo si u y v son proporcionales. $\Box$

La desigualdad de Cauchy–Schwarz correspondiente al espacio $L^2(\Omega)$ es

$$\left|\int_\Omega f\, g\right| \le \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g|^2\right)^{1/2}, \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

Vamos a demostrar un importante resultado relacionado con los espacios de Hilbert antes de pasar a ver dos importantes ejemplos.

Proposición *Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert es un espacio de Hilbert con el mismo producto escalar.*

Dem. Sea H un espacio de Hilbert y V un subespacio suyo. Que V es cerrado (que un subconjunto sea cerrado) significa lo siguiente: si $(u_n) \subset V$ es convergente, $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$, entonces, necesariamente $u \in V$. Dicho de otra manera, los límites de las sucesiones convergentes de V están en V.

Sea (u_n) una sucesión de elementos de V que sea de Cauchy. Ser de Cauchy en V implica serlo en H (ya que la norma es la misma), luego como H es de Hilbert, existe $u \in H$ tal que $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$. Como V es cerrado, $u \in V$ y acabamos de demostrar que V es completo. $\square$

2. Espacios de Sobolev

Consideremos el siguiente espacio de funciones

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \partial_{x_i} u \in L^2(\Omega), \quad \forall i \right\}$$

y el producto escalar en $H^1(\Omega)$ dado por

$$(\!(u, v)\!)_{1,\Omega} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \partial_{x_i} u \; \partial_{x_i} v + \int_\Omega u\, v.$$

Que la expresión anterior define un producto escalar es fácil de demostrar. La norma asociada es

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2 \right)^{1/2}.$$

Proposición $H^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert.*

Dem. Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Así

$$\sum_{i=1}^d \int_\Omega |\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u_m|^2 + \int_\Omega |u_n - u_m|^2 \quad \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

luego (cada sumando debe tender a cero) las sucesiones (u_n) y $(\partial_{x_i} u)$ son de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega)$ es completo, cada una de las sucesiones tiene límite en $L^2(\Omega)$, es decir, existen $u, g_1, \ldots, g_d \in L^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_n - u|^2 &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ \int_\Omega |\partial_{x_i} u_n - g_i|^2 &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad i = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Por último, para cada i y para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
\langle g_i, \varphi \rangle = \int_\Omega g_i \, \varphi \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \int_\Omega (\partial_{x_i} u_n) \, \varphi &= \langle \partial_{x_i} u_n, \varphi \rangle \\
&= -\int_\Omega u_n \, \partial_{x_i} \varphi \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\int_\Omega u \, \partial_{x_i} \varphi = \langle \partial_{x_i} u, \varphi \rangle,
\end{aligned}
$$

luego $\partial_{x_i} u = g_i$. Así $u \in H^1(\Omega)$ y

$$
\int_\Omega |u_n - u|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,
$$

$$
\int_\Omega |\partial_{x_i} u_n - \partial_{x_i} u|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad i = 1, \ldots, d,
$$

lo que implica que $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$. □

Ejercicio. *Denotaremos $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$ y*

$$
\|u\|_{0,\Omega} := \left(\int_\Omega |u|^2 \right)^{1/2}.
$$

Es obvio que $H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega)$. Demuestra que

$$
\|u\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega}, \qquad \forall u \in H^1(\Omega).
$$

Deduce que si $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$, entonces $u_n \to u$ en $H^0(\Omega)$. Demuestra que

$$
\|\partial_{x_i} u\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega}, \qquad \forall u \in H^1(\Omega),
$$

luego $\partial_{x_i} : H^1(\Omega) \to H^0(\Omega)$ es continua [1].

Ejercicio. (*) *Consideremos el espacio de Sobolev*

$$
H^2(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \, |\alpha| \leq 2 \right\},
$$

con el producto escalar

$$
((u, v))_{2,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_\Omega \partial^\alpha u \, \partial^\alpha v.
$$

(a) Demuestra que

$$
H^2(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \,\middle|\, \partial_{x_i} u \in H^1(\Omega), \, i = 1, \ldots, d \right\}.
$$

(b) Demuestra que la norma asociada cumple

$$
\|u\|_{2,\Omega}^2 \leq \|u\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^d \|\partial_{x_i} u\|_{1,\Omega}^2 \leq 2 \, \|u\|_{2,\Omega}^2.
$$

[1] Que una aplicación lineal sea continua quiere decir que cuando se aplica a una sucesión convergente se obtiene otra sucesión convergente. En este caso quiere decir que si $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$, entonces $\partial_{x_i} u_n \to \partial_{x_i} u$ en $L^2(\Omega)$.

(c) Demuestra que una sucesión $u_n \to u$ en $H^2(\Omega)$ si y sólo si

$$\begin{aligned} u_n &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u, && \text{en } H^1(\Omega), \\ \partial_{x_i} u_n &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial_{x_i} u && \text{en } H^1(\Omega), \qquad i = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

(d) Supongamos que (u_n) es una sucesión de Cauchy en $H^2(\Omega)$. Demuestra que las sucesiones (u_n) y $(\partial_{x_i} u_n)$ son de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Sean u y $v_1, \ldots, v_d$ los límites respectivos en $H^1(\Omega)$ de todas esas sucesiones. Demuestra que

$$\partial_{x_i} u_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial_{x_i} u, \qquad \partial_{x_i} u_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} v_i, \qquad \text{en } L^2(\Omega)$$

luego $v_i = \partial_{x_i} u$. Deduce finalmente que $u_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $H^2(\Omega)$.

El último apartado es una demostración que $H^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Introducimos finalmente el espacio

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists (\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega) \\ \|\varphi_n - u\|_{1,\Omega} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array} \right\}.$$

Este espacio es cerrado en $H^1(\Omega)$ por la forma en que está construido, tomando todos los posibles límites en $H^1(\Omega)$ de sucesiones de $\mathcal{D}(\Omega)$. Por tanto, con la norma de $H^1(\Omega)$ es de nuevo un espacio de Hilbert.

3. El lema de Lax–Milgram

Sea H un espacio de Hilbert. Una aplicación lineal

$$\ell : H \to \mathbb{R}$$

es continua si y sólo si

$$u_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad \text{en } H \qquad \Longrightarrow \qquad \ell(u_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell(u), \quad (\text{en } \mathbb{R}),$$

o lo que es lo mismo, si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$|\ell(u)| \le C\,\|u\|, \qquad \forall u \in H.$$

Escribimos entonces

$$\|\ell\|_* := \sup_{0\neq u\in H} \frac{|\ell(u)|}{\|u\|} < \infty,$$

de forma que podemos acotar

$$|\ell(u)| \le \|\ell\|_*\,\|u\|, \qquad \forall u \in H.$$

Ejercicio. *Sea $f \in L^2(\Omega)$. Demuestra que la aplicación*

$$\ell(v) := \int_\Omega f\,v$$

es lineal y continua de $H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. *Demuestra que*

$$\|\ell\|_* \leq \|f\|_{0,\Omega}.$$

Una aplicación bilineal

$$a : H \times H \to \mathbb{R}$$

es continua si y sólo si existe $M > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq M\,\|u\|\,\|v\|, \qquad \forall u, v \in H.$$

Ejercicio. *Considera la forma bilineal*

$$a(u,v) := \int_\Omega \kappa\,\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega c\,u\,v$$

donde $\kappa, c > 0$. *Demuestra que es continua en* $H^1(\Omega)$.

Ejercicio. *Demuestra que si una forma lineal o bilineal es continua en un espacio de Hilbert* H, *entonces es continua en cualquier subespacio suyo.*

El último concepto que vamos a introducir es el de elipticidad. Decimos que una forma bilineal en H es elíptica si existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) > \alpha\|u\|^2, \qquad \forall u \in H.$$

Ejercicio. *Considera de nuevo la forma bilineal*

$$a(u,v) := \int_\Omega \kappa\,\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega c\,u\,v$$

donde $\kappa, c > 0$. *Demuestra que es elíptica en* $H^1(\Omega)$.

Proposición (Lema de Lax–Milgram) *Sean:*

- H *un espacio de Hilbert,*
- $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal continua y elíptica en* H,
- $\ell : H \to \mathbb{R}$ *una forma lineal continua.*

Entonces el problema

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = \ell(v), \qquad \forall v \in H, \end{cases}$$

tiene solución única. Además, fijada la forma bilineal, la aplicación $\ell \mapsto u$ *es lineal y se cumple*

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\ell\|_*.$$

Habitualmente a los problemas del tipo que aparece en el enunciado del Lema de Lax–Milgram

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H, \\ a(u,v) = \ell(v), \qquad \forall v \in H, \end{array}\right.$$

se les denomina **problemas variacionales abstractos**.

De los ejercicios que hemos desarrollado antes se deduce dado $f \in L^2(\Omega)$ y $\kappa, c > 0$, el problema

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega c\, u\, v = \int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \end{array}\right.$$

tiene solución única y

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C\, \|f\|_{0,\Omega}.$$

Ejercicio. *Demuestra que el problema*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega c\, u\, v = \int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array}\right.$$

tiene solución única.

Comentario. Aunque es adelantar acontecimientos, indiquemos ya aquí que el primer problema (el formulado en $H^1(\Omega)$) corresponde al problema de Neumann

$$\left\{\begin{array}{rl} -\kappa \Delta u + c\, u = f, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{array}\right.$$

mientras que el segundo (formulado en $H_0^1(\Omega)$) corresponde al problema de Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{rl} -\kappa \Delta u + c\, u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

□

4. Problemas de minimización cuadráticos

El siguiente resultado establece una interesante relación entre problemas variacionales abstractos y problemas de minimización.

Proposición *Sea H un espacio de Hilbert. Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica*

$$a(u,v) = a(v,u), \qquad \forall u, v \in H$$

y semidefinida positiva

$$a(u,u) \geq 0, \qquad \forall u \in H.$$

Entonces para cualquier $\ell : H \to \mathbb{R}$ lineal, el problema

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = \ell(v), \qquad \forall v \in H \end{cases}$$

es equivalente al problema

$$\tfrac{1}{2}\, a(u,u) - \ell(u) = \text{mín!}, \qquad u \in H.$$

Comentario. Que dos problemas son equivalentes significa que cualquier solución de uno es solución del otro. La notación

$$\jmath(u) = \text{mín!}, \qquad u \in H$$

significa que u es el elemento de H que hace que el valor del funcional $\jmath(u)$ sea mínimo. □

Ejercicio. *Escribe a qué problema variacional es equivalente el siguiente problema de minimización:*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f\, u = \text{mín!}, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

5. Problema de Dirichlet homogéneo

Antes de presentar nuestro primer problema de contorno para ecuaciones en derivadas parciales nos hace falta introducir un concepto generalizado de condición de contorno tipo Dirichlet. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^d$ situado a un lado de su frontera $\Gamma := \partial\Omega$ (luego no tiene grietas interiores) y de forma que su frontera es local el grafo de una función de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos.

Proposición (Teorema de trazas) *Existe una aplicación lineal y continua*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$$

de forma que $\gamma u = u|_\Gamma$ para todo $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ y es la única que cumple esto. Además, dado $u \in H^1(\Omega)$

$$u \in H_0^1(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma u = 0.$$

De la sección anterior se deduce que (con $f \in L^2(\Omega)$), los problemas

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2 - \int_\Omega f\, u = \text{mín!}, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

y

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

son equivalentes. Aquí el espacio de Hilbert es $H = H_0^1(\Omega)$, la forma bilineal es

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v$$

y la forma lineal es

$$\ell(v) := \int_\Omega f\, v.$$

Es fácil deducir que el segundo problema (el problema variacional) tiene solución única, luego el problema de minimización también la tiene.

Si u es solución de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

automáticamente $\gamma u = 0$, es decir, u cumple una condición de contorno de tipo Dirichlet homogénea sobre todo Γ.

Ahora bien,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

equivale a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\, \varphi = \int_\Omega f\, \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(vimos ya este argumento en el capítulo precedente) y esto no es más que la ecuación en derivadas parciales

$$-\Delta u + u = f$$

en el sentido de distribuciones sobre Ω. Esto quiere decir que hemos dado un sentido generalizado al problema de contorno

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

y hemos demostrado que en ese sentido existe solución, es única y es función continua del dato f.

Comentario. En el próximo capítulo sistematizaremos la forma de relacionar problemas de contorno y problemas variacionales Por ahora, partimos del problema de minimización y recorreremos el camino hasta el problema de contorno. □

Proposición (Desigualdad de Poincaré) *Existe una constante $c = c(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq c\,\|u\|_{1,\Omega}^2, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Es fácil notar que la desigualdad anterior no se puede cumplir en todo $H^1(\Omega)$ por la sencilla razón de que la función $u \equiv 1$ no la cumple.

Ejercicio. *Considera el problema de minimización:*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f\,u = \text{mín!}, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

siendo f una función de $L^2(\Omega)$.

(a) *Escribe (de nuevo) el problema variacional asociado.*

(b) *Empleando el lema de Lax–Milgram, demuestra que el problema variacional tiene solución única (la elipticidad se deduce de la desigualdad de Poincaré).*

(c) *Demuestra que ambos problemas son equivalentes a*

$$\left\{\begin{array}{rl} u \in H^1(\Omega), & \\ u = 0, & \text{en } \Gamma \\ -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \end{array}\right.$$

entendiendo la ecuación en el sentido de distribuciones y la condición de contorno en el sentido de trazas.

Ejercicio. *Sea $c : \Omega \to \mathbb{R}$ una función tal que*

$$0 \leq c(\mathbf{x}) \leq c_1 \ (\text{ctp}).$$

Repite toda la argumentación del ejercicio anterior para el problema de minimización

$$\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega c\,|u|^2\right) - \int_\Omega f\,u = \text{mín!}, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

6. El teorema de Riesz–Fréchet (*)

La sección que sigue es considerablemente más compleja y ya veremos si podemos evitárnosla. Por ahora, ignora esta parte.

Hay una forma poco habitual de escribir la desigualdad de Cauchy–Schwarz. Notemos que la desigualdad es equivalente a

$$\sup_{0 \neq v \in H} \frac{|(u,v)|}{\|v\|} \leq \|u\|, \qquad \forall u \in H.$$

Como además sabemos que si $v = u$ (o es proporcional a u) la desigualdad es una igualdad, se concluye que

$$\sup_{0\neq v\in H} \frac{|(u,v)|}{\|v\|} = \|u\|, \qquad \forall u \in H.$$

El espacio de las aplicaciones lineales y continuas de H en $\mathbb{R}$ se denomina **espacio dual** de H y se denota H' ó H^*. Aquí vamos a emplear la primera notación. Dada una aplicación lineal continua $\ell : H \to \mathbb{R}$, a la magnitud

$$\|\ell\|_* := \sup_{0\neq u\in H} \frac{|\ell(u)|}{\|u\|},$$

que necesariamente es finita, se le llama **norma dual.**

Fijar una componente del producto escalar define una aplicación lineal

$$\begin{array}{rcccc} (u,\,\cdot\,) & : & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & (u,v) \end{array}$$

que es continua por la desigualdad de Cauchy–Schwarz. Pero además, la forma como hemos escrito la desigualdad nos dice que

$$\|(u,\,\cdot\,)\|_* = \|u\|, \qquad \forall u \in H.$$

Así, todos los elementos de H definen de esta manera (fijándolos como primera componente del producto escalar) elementos del dual de H. Si dos elementos de H definen el mismo elemento del dual, necesariamente coinciden:

$$(u,\,\cdot\,) = (v,\,\cdot\,) \qquad \Longrightarrow \qquad u = v$$

(¡basta compararlos aplicados a $u-v$!). El teorema de Riesz–Fréchet va más allá y afirma que todos los elementos del dual se pueden definir así, es decir, dado $\ell \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que

$$\ell = (u,\,\cdot\,)$$

esto es,

$$\ell(v) = (u,v), \qquad \forall v \in H.$$

Además

$$\|\ell\|_* = \|(u,\,\cdot\,)\|_* = \|u\|.$$

Teorema (Riesz–Fréchet) *La aplicación*

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H' \\ u & \longmapsto & (u,\,\cdot\,) \end{array}$$

es una biyección lineal que preserva la norma.

Además de identificar elementos del dual con elementos de H, el teorema de Riesz–Fréchet sirve para identificar formas bilineales y operadores. Tomemos una forma bilineal (lineal en cada componente) $a : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que

$$|a(u,v)| \leq M\,\|u\|\,\|v\|, \qquad \forall u,v \in H$$

(luego es continua). Si fijamos u, tenemos una aplicación lineal y continua

$$a(u,\,\cdot\,) : H \to \mathbb{R}$$

luego existe un único elemento de H (lo llamamos Au) tal que

$$(Au,\,\cdot\,) = a(u,\,\cdot\,)$$

o, de nuevo,

$$(Au,v) = a(u,v), \qquad \forall u,v \in H.$$

La aplicación que asocia $u \mapsto Au$ es lineal puesto que

$$\begin{aligned} (A(\alpha\,u + \beta\,v),\,\cdot\,) &= a(\alpha\,u + \beta\,v,\,\cdot\,) = \alpha\,a(u,\,\cdot\,) + \beta\,a(v,\,\cdot\,) \\ &= \alpha\,(Au,\,\cdot\,) + \beta\,(Av,\,\cdot\,) = (\alpha\,Au + \beta\,Av,\,\cdot\,). \end{aligned}$$

Además,

$$\|Au\| = \|(Au,\,\cdot\,)\|_* = \|a(u,\,\cdot\,)\|_* \leq M\|u\|, \qquad \forall u \in H.$$

Por tanto, la aplicación $A : H \to H$ es lineal y continua.

Consideremos por último un problema variacional abstracto:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H, \\ a(u,v) = \ell(v), \qquad \forall v \in H. \end{array} \right.$$

donde:

- H es un espacio de Hilbert
- $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ es una forma bilineal continua
- $\ell \in H'$.

Tomando $f \in H$ tal que

$$\ell = (f,\,\cdot\,)$$

y $A : H \to H$ (lineal y continuo) tal que

$$(Au,v) = a(u,v), \qquad \forall u,v \in H$$

llegamos a la ecuación de operadores

$$Au = f,$$

donde el papel de H como espacio test ha desaparecido.

Lección 3

Problemas de contorno elípticos

Este capítulo se puede ver de dos formas. Por un lado es una colección de aplicaciones del Lema de Lax–Milgram y de la relación entre problemas de minimización cuadráticos y problemas variacionales. Por otro, es un cambio de punto de vista respecto de lo visto anteriormente, para centrarnos definitivamente en algunas de las principales ecuaciones en derivadas parciales de la mecánica y la física de medios continuos. Una de las consecuencias que hay que extraer de este capítulo a veces necesitamos leves retoques (cuando no directamente martillazos) a los resultados abstractos que tenemos para poder aplicarlos a problemas muy similares. Estos retoques no requieren de una nueva teoría abstracta (más general) hasta que uno se da cuenta de que se están haciendo de forma repetitiva y conviene, por tanto, generar un nuevo resultado abstracto para simplificarnos la vida. El ejercicio que culmina la Sección 3 es un ejemplo de esto. El tratamiento del problema de Neumann para el laplaciano (Sección 4) va a ser hecho 'a mano', pero dentro de dos lecciones veremos que encaja dentro de un tipo más general de comportamientos.

1. Problema de Dirichlet homogéneo

Partimos de una pequeña generalización del problema con el que finalizaba el capítulo anterior:

$$\frac{1}{2}\left(\int_\Omega \kappa\,|\nabla u|^2 + \int_\Omega c\,|u|^2\right) - \int_\Omega f\,u = \text{mín!}, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

con dato $f \in L^2(\Omega)$ y las siguientes hipótesis sobre los coeficientes:

$$0 < \kappa_0 \le \kappa(\mathbf{x}) \le \kappa_1 \ (\text{ctp}),$$

$$0 \le c(\mathbf{x}) \le c_1 \ (\text{ctp}).$$

Fíjate que no estamos exigiendo ningún tipo de condición de continuidad a los coeficientes de la ecuación.

Ejercicio. *Con las hipótesis anteriores:*

(a) Escribe a qué problema variacional abstracto corresponde el problema de minimización.

(b) Empleando el Lema de Lax–Milgram, demuestra existencia y unicidad del solución.

(c) Demuestra que el problema es equivalente al siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa\,\nabla u) + c\,u = f, & \textit{en } \Omega, \\ u = 0, & \textit{en } \Gamma, \end{cases}$$

donde la ecuación se entiende en el sentido de distribuciones y la condición de contorno en el de trazas.

(d) Demuestra que si $c(\mathbf{x}) \geq c_0 > 0$ (ctp), *la forma bilineal es elíptica en todo* $H^1(\Omega)$.

Nota que si $u \in H^1(\Omega)$, las componentes del vector ∇u son funciones de cuadrado integrable. Al multiplicarlas por la función κ (el coeficiente de difusión), el resultado sigue siendo una función integrable (puesto que κ es acotada) y la divergencia se puede aplicar en el sentido de distribuciones. Cada uno de los sumandos que dan lugar a la divergencia es una distribución. Su suma es una función.

2. Problemas de Neumann

Simplificamos el problema anterior tomando coeficientes constantes iguales a la unidad: $\kappa \equiv 1$, $c \equiv 1$. A cambio, vamos a ampliar el espacio a $H^1(\Omega)$. Por tanto, ya no estamos imponiendo una condición de contorno en la definición del espacio.

El punto de partida vuelve a ser un problema de minimización:

$$\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2\right) - \int_\Omega f\,u = \text{mín!}, \qquad u \in H^1(\Omega).$$

Este problema es equivalente al problema variacional

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\,v = \int_\Omega f\,v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Ejercicio. *Demuestra (de nuevo) que este último problema tiene una única solución.*

Fase I (Ecuación en derivadas parciales). Como $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, la solución del problema cumple

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\,\varphi = \int_\Omega f\,\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Reconociendo todo lo que son funciones y escribiendo las integrales como acciones de distribuciones sobre funciones test

$$\sum_{j=1}^d \langle \partial_{x_j} u, \partial_{x_j} \varphi\rangle + \langle u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se obtiene fácilmente que

$$-\Delta u + u = f, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

No obstante, a diferencia del caso en que el test es $H_0^1(\Omega)$, esta última ecuación no implica que se puedan ampliar los tests a todo $H^1(\Omega)$, sino sólo a $H_0^1(\Omega)$. Dicho de otro modo, la segunda línea del problema variacional contiene algo más que la ecuación en derivadas parciales.

Fase II (Condición de contorno natural). Sustituimos entonces $f = -\Delta u + u$ en el problema variacional y tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = -\int_\Omega (\Delta u)\, v + \int_\Omega u\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

es decir,

$$\int_\Omega (\Delta u)\, v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = 0, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Que esto es una condición de contorno es bastante menos obvio que en el caso Dirichlet. Para interpretarlo correctamente necesitamos la **primera fórmula de Green**.

Si $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$, entonces se tiene

$$\int_\Omega (\Delta u)\, v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Gamma (\partial_\nu u)\, \gamma v.$$

En esta expresión la derivada normal se entiende como sigue: las componentes de ∇u están en $H^1(\Omega)$ y se puede tomar su traza sobre Γ; seguidamente se define $\partial_\nu u = \gamma(\nabla u) \cdot \mathbf{n}$, siendo $\mathbf{n}$ el vector normal exterior a Γ. La fórmula de Green sigue siendo válida en un sentido más débil si $u \in H^1(\Omega)$ y $\Delta u \in L^2(\Omega)$. En ese caso la integral

$$\int_\Gamma (\partial_\nu u)\, \gamma v$$

debe ser entendida en un sentido generalizado, ya que la derivada normal no acaba de ser una función. No vamos a detenernos en este detalle.

Además se tiene el siguiente resultado: si $g \in L^2(\Gamma)$, entonces

$$\int_\Gamma (\partial_\nu u)\, \gamma v = \int_\Gamma g\, \gamma v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_\nu u = g.$$

Así, la solución de nuestro problema variacional cumple, por la fórmula de Green, que

$$\int_\Gamma (\partial_\nu u)\, \gamma v = 0, \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_\nu u = 0.$$

Por tanto, la solución del problema variacional es solución del problema de contorno

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u + u = f, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{en } \Gamma. \end{array} \right.$$

Deducción de la formulación variacional. Si partimos del problema de contorno, tomamos la fórmula de Green como punto de partida (*vamos a omitir el símbolo de traza para v en adelante*)

$$\int_\Omega (\Delta u)\, v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Gamma (\partial_\nu u)\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

y sustituimos en ella $\Delta u = u - f$ y $\partial_\nu u = 0$, obtenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \end{array} \right.$$

esto es, la formulación variacional.

Ejercicio. *Escribe la formulación variacional del siguiente problema de contorno*

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u + u = f, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u = g, & \text{en } \Gamma, \end{array} \right.$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$. Demuestra que esa formulación es equivalente al siguiente problema de minimización

$$\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2 \right) - \int_\Omega f\, u - \int_\Gamma g\, u = \text{mín!}, \qquad u \in H^1(\Omega).$$

3. Problema de Dirichlet no homogéneo

Vamos a tratar el siguiente problema de contorno

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = g_0, & \text{en } \Gamma. \end{array} \right.$$

La función dato $g_0 : \Gamma \to \mathbb{R}$ es tal que existe una función de $H^1(\Omega)$ de la cual es su traza.

Volvemos a partir de la fórmula de Green

$$\int_\Omega (\Delta u)\, v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Gamma (\partial_\nu u)\, v$$

en la que sustituimos $\Delta u = -f$ para obtener

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, u + \int_\Gamma (\partial_\nu u)\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

La condición de contorno para u se puede imponer directamente y entonces en el test nos basta con que $v \in H_0^1(\Omega)$. Esto quiere decir que el problema de contorno es equivalente al problema

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1(\Omega), \\ \gamma u = u_0, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) = \Big\{ v \in H^1(\Omega) \,\Big|\, \gamma v = 0 \Big\}. \end{array}\right.$$

Este resultado no acaba de encajar en el formato de Lax–Milgram, pero es muy fácil modificarlo. Sea $u_0 \in H^1(\Omega)$ cualquier función cuya traza sea la requerida, es decir, cualquier función que cumpla la condición de contorno

$$u_0 = g, \qquad \text{en } \Gamma.$$

Conocer la diferencia $w := u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ es suficiente para conocer u, puesto que así $u = u_0 + w$. Pero es fácil observar que

$$\left\{\begin{array}{l} w \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v - \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right.$$

Esto sí es un problema variacional abstracto. La elipticidad se deduce de la desigualdad de Poincaré. La forma lineal es algo más complicada que lo acostumbrado

$$\ell(v) := \int_\Omega f\, v - \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v,$$

y cumple

$$\|\ell\|_* \le \|f\|_{0,\Omega} + \|u_0\|_{1,\Omega}.$$

Así, existe solución única del problema variacional (del que define w y, por tanto del que define u) y se tiene la continuidad respecto de los datos

$$\|u\|_{1,\Omega} \le \|w\|_{1,\Omega} + \|u_0\|_{1,\Omega} \le (1/\alpha)\|f\|_{0,\Omega} + (1 + 1/\alpha)\|u_0\|_{1,\Omega}.$$

Comentario. La cota parece depender de u_0, función que levantaba arbitrariamente la condición de contorno de Dirichlet al interior del dominio. Para aclarar que esto no es más que una dependencia continua respecto del dato g_0 hacen falta algunas definiciones más. El conjunto de las funciones de $L^2(\Gamma)$ que son traza de alguna función de $H^1(\Omega)$ no llega a ser todo $L^2(\Gamma)$. A este conjunto se le denomina

$$H^{1/2}(\Gamma).$$

La razón del índice Sobolev fraccionario no es obvia a estos niveles. En este espacio se toma como norma

$$\|g\|_{1/2,\Gamma} := \operatorname{ínf} \Big\{ \|v\|_{1,\Omega} \,\Big|\, \gamma v = g \Big\}$$

y de esta forma se consigue: (a) que la traza

$$\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$$

siga siendo continua con la nueva norma; (b) que para el problema no homogéneo se obtenga una constante C de forma que

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C\left(\|f\|_{0,\Omega} + \|g_0\|_{1/2,\Gamma}\right)$$

lo cual es, propiamente, una desigualdad que demuestra la continuidad de la solución respecto de los datos. $\square$

Ejercicio. (*) *Supongamos que $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ es una forma bilineal simétrica y semidefinida positiva, ℓ es una forma lineal y γ es una aplicación lineal. Sea g_0 y u_0 arbitrario tal que*

$$\gamma u_0 = g_0.$$

(a) Demuestra que

$$\tfrac{1}{2}\,a(u,u) - \ell(u) = \text{mín!}, \qquad u \in V, \qquad \gamma u = g_0$$

alcanza el mínimo en $u = u_0 + w$, donde w resuelve

$$\tfrac{1}{2}\,a(w,w) - \ell(w) - a(u_0,w) = \text{mín!}, \qquad w \in V_0 := \{w \in V \,|\, \gamma w = 0\}$$

(b) Demuestra por tanto que el problema de mínimo

$$\tfrac{1}{2}\,a(u,u) - \ell(u) = \text{mín!}, \qquad u \in V, \quad \gamma u = g_0,$$

equivale al problema variacional modificado

$$\left\{\begin{array}{l} u \in V, \\ \gamma u = g_0, \\ a(u,v) = \ell(v), \qquad \forall v \in V_0. \end{array}\right.$$

(c) Escribe qué problema de minimización es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rl} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = g_0, & \text{en } \Gamma. \end{array}\right.$$

4. Problema de Neumann para el laplaciano

Nos planteamos ahora el siguiente problema de contorno:

$$\left\{\begin{array}{rl} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u = g, & \text{en } \Gamma. \end{array}\right.$$

No es complicado ver que este problema tiene la formulación variacional

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v + \int_\Gamma g\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

correspondiente al problema de minimización

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f\, u - \int_\Gamma g\, u = \text{mín!}, \qquad u \in H^1(\Omega).$$

- De la formulación variacional, testando con $v \equiv 1$ se deduce que es necesario que

$$\int_\Omega f + \int_\Gamma g = 0,$$

  para que el problema tenga solución. Esto también se puede deducir fácilmente del problema de contorno con ayuda del teorema de la divergencia

$$-\int_\Omega f = \int_\Omega \text{div}(\nabla u) = \int_\Gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = \int_\Gamma g.$$

  En adelante, vamos a suponer que se cumple esta condición de compatibilidad entre los datos.

- También es fácil ver, tanto en el problema de contorno como en el problema variacional, que si u es una solución $u+c$ es solución para todo c constante. Así, imponemos que

$$\int_\Omega u = 0$$

  como forma de escoger una única solución.

- Tomemos el espacio

$$V := \Big\{ u \in H^1(\Omega) \,\Big|\, \int_\Omega u = 0 \Big\}.$$

  La condición de compatibilidad nos permite ver que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v + \int_\Gamma g\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

  si y sólo si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v + \int_\Gamma g\, v, \qquad \forall v \in V.$$

Por las razones anteriores, la formulación variacional se modifica a la siguiente:

$$\begin{cases} u \in V, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v + \int_\Gamma g\, v, \qquad \forall v \in V. \end{cases}$$

La elipticidad del problema se deduce del siguiente resultado general.

Proposición (Desigualdad de Poincaré generalizada) *Supongamos que V es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ tal que*

$$V \cap \mathbb{P}_0 = \{0\}$$

($\mathbb{P}_0$ es el espacio de las funciones constantes). Entonces la desigualdad de Poincaré se satisface en V, esto es, existe α (que depende del espacio V) tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \alpha \, \|u\|_{1,\Omega}^2, \qquad \forall u \in V.$$

Por último, recordemos que la solución no es única. Esta formulación nos da una solución. Sumando cualquier constante, se obtienen todas las demás.

5. Otros problemas

5.1. Problema de contorno mixto

Consideremos que la frontera del dominio Ω está partida en dos subfronteras Γ_D y Γ_N, sin solapamiento y no triviales (es decir, son dominios $(d-1)-$dimensionales no triviales). Nos podemos plantear el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = g_0, & \text{en } \Gamma_D, \\ \partial_\nu u = g, & \text{en } \Gamma_N. \end{cases}$$

Si en la fórmula de Green sustituimos todos los datos, obtenemos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v + \int_{\Gamma_N} g\, v + \int_{\Gamma_D} (\partial_\nu u)\, v.$$

El último sumando *sobra*, así que se impone que $v = 0$ sobre la frontera Dirichlet. Llegamos así a una formulación variacional donde el espacio

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega) \,\middle|\, v|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$$

hará de espacio test:

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ u|_{\Gamma_D} = g_0, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v + \int_{\Gamma_N} g\, v, \qquad \forall v \in V. \end{cases}$$

Tanto en la definición de V, como en la segunda condición del problema (la condición de Dirichlet para u) o en la aparición de v dentro de la integral sobre Γ_N, hay que entender todo ello en el sentido de trazas: primero se toma la traza sobre todo Γ y luego se restringe la función resultado al fragmento deseado de frontera. Por tanto las trazas

$$\gamma_D : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_D), \qquad \gamma_N : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_N)$$

están bien definidas y son continuas. El espacio test V no es más que

$$\Big\{ v \in H^1(\Omega) \,\Big|\, \gamma_D v = 0 \Big\}.$$

A partir de allí, sabiendo que γ_D es continuo, es fácil demostrar que V es cerrado.

Ejercicio. *Demuestra que la forma bilineal obtenida es elíptica en este espacio V (Ayuda: emplea la desigualdad de Poincaré generalizada).*

El problema de minimización asociado es

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f\,u - \int_{\Gamma_N} g\,u = \text{mín!}, \qquad u \in H^1(\Omega), \quad \gamma_D u = g_0.$$

Comentario. Uno podría tener dudas de si se puede intentar imponer dos condiciones de contorno en la misma parte de la frontera. Desde el punto de vista del problema de minimización está claro que no es posible. Si intentamos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega f\,u - \int_\Gamma g\,u = \text{mín!}, \qquad u \in \Big\{ v \in H^1(\Omega) \,\Big|\, v = 0, \quad \text{en } \Gamma_D \Big\},$$

tanto aquí como en la formulación variacional, está claro que en la integral

$$\int_\Gamma g\,u = \int_{\Gamma_N} g\,u + \int_{\Gamma_D} g\,u$$

el segundo sumando no juega ningún papel: es nulo. Incluso si la condición en Γ_D fuera no homogénea, ese sumando sería constante (sería un dato) y no participaría de la elección de u. Por tanto, no correspondería a ninguna condición de contorno natural. $\square$

5.2. Coeficiente de difusión variable

Volvamos a plantearnos un problema de difusión con un coeficiente variable:

$$\frac{1}{2}\Big(\int_\Omega \kappa\,|\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2\Big) - \int_\Omega f\,u - \int_\Gamma g\,u = \text{mín!}, \qquad u \in H^1(\Omega).$$

Los datos están en los espacios acostumbrados: $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$. El coeficiente de difusión variable cumple

$$0 < \kappa_0 \le \kappa(\mathbf{x}) \le \kappa_1 \text{ (ctp)}$$

Este problema equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \kappa\,\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\,v = \int_\Omega f\,v + \int_\Gamma g\,v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Ejercicio. *Demuéstralo. Demuestra también existencia y unicidad de solución.*

No hay condición de contorno esencial (Dirichlet). Si restringimos los tests a $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se obtiene la ecuación

$$-\operatorname{div}(\kappa\,\nabla u) + u = f, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Al sustituir ahora f en la formulación variacional, tenemos

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\kappa\,\nabla u)\,v + \int_\Omega \kappa\,\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Gamma g\,v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Esto no es la fórmula de Green, sino una pequeña variante. Recordemos que

$$\int_\Omega (\partial_{x_i} w)\,v + \int_\Omega w\,(\partial_{x_i} v) = \int_\Gamma (w\,n_i)\,v.$$

Aplicando esta fórmula a funciones diferentes funciones $w = w_i$ y sumando, tenemos

$$\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{w})\,v + \int_\Omega \mathbf{w}\cdot\nabla v = \int_\Gamma (\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})\,v.$$

Finalmente si tomamos el campo $\mathbf{w} := \kappa\nabla u$, obtenemos

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\kappa\,\nabla u)\,v + \int_\Omega \kappa\,\nabla u\;\cdot\nabla v = \int_\Gamma (\kappa\nabla u\cdot\mathbf{n})\,v.$$

El término $\kappa\nabla u$ es la función de flujo asociada a la ecuación. Modifica el gradiente (la variación de u) de forma no homogénea en el dominio. El término $(\kappa\,\nabla u)\cdot\mathbf{n}$ es el flujo normal en la frontera.

Recuperando, hemos demostrado que la solución del problema variacional cumple

$$\int_\Gamma (\kappa\,\nabla u\cdot\mathbf{n})v = \int_\Gamma g\,v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

luego se llega a la condición de contorno

$$\kappa\,\nabla u\cdot\mathbf{n} = g, \qquad \text{en } \Gamma.$$

Ejercicio. *Dar la formulación variacional y el problema de minimización asociado al problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa\,\nabla u) = f, & \textit{en } \Omega,\\ (\kappa\nabla u)\cdot\mathbf{n} = g, & \textit{en } \Gamma_N. \end{cases}$$

Demuestra que los datos deben cumplir una cierta condición de compatibilidad (ver Problema de Neumann para el laplaciano).

Es bastante fácil generalizar toda esta gama de problemas a situaciones donde la difusión no es isótropa. El operador de difusión es entonces de la forma

$$-\operatorname{div}(K\,\nabla u)$$

Ahora $K : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ es una función matricial. Se pide que cada componente sea acotada y que

$$\xi \cdot (K(\mathbf{x})\,\xi) \geq \alpha|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \text{(ctp)}.$$

Esto garantiza que

$$\int_\Omega (K\,\nabla u)\cdot \nabla u \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2, \qquad \forall u \in H^1(\Omega)$$

y a partir de allí se puede estudiar la elipticidad fácilmente. La condición de contorno natural es de la forma

$$(K\nabla u)\cdot \mathbf{n},$$

es decir, es una condición sobre la componente normal del vector flujo $K\,\nabla u$.

Ejercicio. *Escribir el problema variacional y el problema de contorno asociados al siguiente problema de minimización:*

$$\frac{1}{2}\Big(\int_\Omega (K\,\nabla u)\cdot\nabla u + \int_\Omega |u|^2\Big) - \int_\Omega f\,u - \int_\Gamma g\,u = \text{mín!}, \qquad u \in H^1(\Omega).$$

La matriz $K(\mathbf{x})$ se supone simétrica para todo $\mathbf{x}$ y cumple las condiciones dadas anteriormente.

5.3. Condiciones de impedancia

Ejercicio. *Escribe la formulación variacional y el problema de minimización asociados al problema de contorno (el coeficiente $k : \Gamma \to \mathbb{R}$ es una función positiva y acotada)*

$$\left\{\begin{array}{rl} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u + k\,u = g, & \text{en } \Gamma. \end{array}\right.$$

Escribe qué deberías demostrar para tener elipticidad del problema.

6. Métodos de Galerkin

Los problemas anteriores encajan en la siguiente estructura que estudiamos de forma abstracta a través del Lema de Lax–Milgram:

$$\left\{\begin{array}{l} u \in V, \\ a(u,v) = \ell(v), \qquad \forall v \in V. \end{array}\right.$$

Recordemos que las condiciones esenciales no homogéneas nos dan una cierta variante, de la que ahora no vamos a preocuparnos.

Supongamos que $V_h \subset V$ es un subespacio de dimensión finita del espacio V. Se llama **método de Galerkin** asociado al espacio discreto V_h al siguiente problema variacional en el espacio V_h

$$\begin{cases} u_h \in V_h, \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

Ejercicio. *Demuestra que si se cumplen las hipótesis del Lema de Lax–Milgram en V también se cumplen en V_h y, por tanto, el problema discreto tiene solución única.*

Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ una base cualquiera del espacio V_h. Entonces, si

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h,$$

también se cumple que

$$a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i), \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Recíprocamente, si se cumplen las N ecuaciones anteriores, entonces se cumple también que

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h,$$

ya que cada v_h se puede poner como combinación lineal de las funciones φ_i y todo es lineal. Además,

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_j \, \varphi_j(\mathbf{x}),$$

ya que $u_h \in V_h$. Por tanto,

$$a(u_h, \varphi_i) = a(\textstyle\sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) \, u_j.$$

Esto quiere decir que el problema discreto

$$\begin{cases} u_h \in V_h, \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h, \end{cases}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) \, u_j = \ell(\varphi_i), \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Esto es un sistema lineal $N \times N$. Su solución permite calcular u_h mediante la expresión

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j \, \varphi_j.$$

Ejercicio. *Demuestra que si la forma bilineal $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ es simétrica, entonces la matriz del sistema es simétrica.*

Proposición (Lema de Céa) *Si u y u_h son las soluciones respectivas de los problemas*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in V, \\ \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in V, \end{array}\right. \qquad\qquad \left\{\begin{array}{l} u_h \in V_h, \\ \\ a(u_h,v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{array}\right.$$

entonces

$$\|u - u_h\| \leq (M/\alpha) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Dem. Para cualquier $v_h \in V_h$ se tiene que $u_h - v_h \in V_h \subset V$, luego

$$\begin{aligned} \alpha\|u-u_h\|^2 &\leq a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-v_h+v_h-u_h) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) + a(u-u_h, v_h-u_h) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) + a(u, v_h-u_h) - a(u_h, u_h-v_h) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) + \ell(v_h-u_h) - \ell(v_h-u_h) = a(u-u_h, u-v_h) \\ &\leq M\|u-u_h\|\,\|u-v_h\|. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|u - u_h\| \leq (M/\alpha)\|u - v_h\|, \qquad \forall v_h \in V_h.$$

□

El término

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

es un término de aproximación: mide la capacidad del espacio donde buscamos la solución discreta, V_h, para aproximar la solución del problema. Este resultado deja el problema de estudiar el error del método de Galerkin trasferido al problema de estudiar un error de aproximación, independiente del problema que se está resolviendo.

Comentario. El más popular de los métodos de Galerkin es el Método de los Elementos Finitos. Aplicado a un problema de contorno de segundo orden consiste en: (a) realizar la formulación variacional del problema; (b) definir un subespacio del espacio correspondiente a base de funciones polinómicas a trozos continuas; (c) plantear un método de Galerkin con ese espacio. La clave del método de los elementos finitos es que el tipo de espacios que se definen permite construir bases del espacio compuestas por funciones que únicamente no se anulan en un conjunto pequeño. □

Lección 4

Problemas de la elasticidad lineal

En esta lección vamos a estudiar las ecuaciones más básicas de la elasticidad: las de Navier–Lamé en dimensiones dos y tres y el modelo de placa de Kirchhoff. La teoría abstracta subyacente es exactamente la misma que para la ecuación de Laplace. Las novedades consisten en que las ecuaciones de Navier–Lamé son vectoriales (en lugar de escalares) y que las de Kirchhoff son de cuarto orden. Este último caso generará una mayor variedad de condiciones de contorno.

En ambos casos vamos a encontrarnos con muchos paralelos con la ecuación de Laplace. La fórmula de Green será sustituida por las fórmulas de Betti (Navier–Lamé) y Rayleigh–Green (Kirchhoff). Las soluciones constantes que impedían la unicidad de solución del problema de Neumann se convertirán en los movimientos rígidos (Navier–Lamé) o en los desplazamientos planos (Kirchhoff). La desigualdad de Poincaré será reemplazada por la desigualdad de Korn (Navier–Lamé) o por una sencilla consecuencia de ella misma (Kirchhoff).

1. Elementos de elasticidad lineal

En el modelo de la elasticidad lineal la incógnita es un campo vectorial, llamado **campo de desplazamientos**

$$\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \qquad d = 2 \text{ ó } 3,$$

respecto de una posición de referencia Ω. Una segunda incógnita es el tensor de deformaciones (*strain*)

$$\varepsilon : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}_{\rm sim}$$

($\mathbb{R}^{d\times d}_{\rm sim}$ es el conjunto de las matrices simétricas). En el modelo lineal

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\Big(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top\Big),$$

luego

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big).$$

Hay una tercera incógnita, que es el **tensor de tensiones** (*stress*)

$$\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sim}}.$$

En el modelo lineal para sólidos homogéneos e isótropos la relación entre tensiones y deformaciones está dada por la **Ley de Hooke**

$$\sigma = 2\mu\,\varepsilon + \lambda\,(\mathrm{tr}\,\varepsilon)\,I,$$

luego

$$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\bigg(\sum_{k=1}^{d}\varepsilon_{kk}\bigg)\delta_{ij}.$$

Como vamos a adoptar en adelante estas dos reglas de dependencia de deformaciones en función de desplazamientos y de tensiones en función de deformaciones, podemos poner todo en términos de los desplazamientos

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}\Big(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top\Big), \qquad \sigma(\mathbf{u}) = \mu\,\Big(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top\Big) + \lambda\,(\mathrm{div}\,\mathbf{u})\,I,$$

de forma que

$$\sigma_{ij} = \mu\bigg(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\bigg) + \lambda\bigg(\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\bigg)\delta_{ij}.$$

Las constantes μ y λ se denominan constantes de Lamé y se toman positivas.

Comentario. Las constantes de Lamé no tienen sentido físico pero se pueden escribir en términos de otras que sí lo tienen. Para aplicaciones más directas es costumbre escribir la Ley de Hooke con las constantes físicas adecuadas. Desde el punto de vista de realizar una formulación y seguidamente simulación numérica esto es menos relevante. □

La energía elástica está dada por la expresión

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) = \mu\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2,$$

donde el producto escalar de dos matrices se define

$$A : B = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\,b_{ij}.$$

Comentario. El modelo lineal lo es en dos niveles:

- La relación entre deformación y desplazamiento es lineal. La posición de un punto que en referencia está en $\mathbf{x}\in\Omega$ es $\phi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$. La deformación es

  $$\tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^\top(\nabla\phi) - \tfrac{1}{2}I$$

  (es nula si no hay desplazamiento). Para ver el tensor linealizado, se toma un desplazamiento pequeño $\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{u}(\mathbf{x})$ y en la definición de las deformaciones se cancelan los términos de orden ϵ^2. Así sale el tensor de deformaciones linealizado.

- La relación entre tensiones y deformaciones está dada por una ley lineal, la Ley de Hooke. En la Sección 4 miraremos otras leyes de comportamiento lineales para materiales no homogéneos y anisótropos.

La primera de las linealizaciones impone que este modelo tiene sentido únicamente para **pequeñas deformaciones**. $\square$

2. Ecuaciones de Navier–Lamé

Consideremos el espacio

$$\mathbf{H}^1(\Omega) := \{\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d \,|\, u_i \in H^1(\Omega), \quad \forall i\}$$

con el producto escalar

$$\begin{aligned} (\!(\mathbf{u}, \mathbf{v})\!)_{1,\Omega} &:= \sum_{i=1}^d (\!(u_i, v_i)\!)_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^d \left(\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i + \int_\Omega u_i \, v_i \right) \\ &= \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

La norma asociada es

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Por último,

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \,|\, u_i \in H_0^1(\Omega), \quad \forall i\},$$

que trivialmente es el conjunto los campos vectoriales de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ que se pueden tomar como límite en norma $\| \cdot \|_{1,\Omega}$ de campos con componentes en $\mathcal{D}(\Omega)$. Los datos del problema estarán en el espacio $\mathbf{L}^2(\Omega) := \{\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d \,|\, f_i \in L^2(\Omega) \, \forall i\}$.

El primer problema que vamos a tratar es: dada $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \text{mín!}, \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

La forma bilineal asociada es

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) + \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}) \, (\operatorname{div} \mathbf{v}).$$

En la segunda expresión se ve claramente que la forma bilineal es simétrica y semidefinida positiva. El problema de minimización es por tanto equivalente al problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \displaystyle \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Ejercicio. *Demuestra que la forma bilineal* $a : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *es continua y que la forma lineal* $\ell : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\ell(\mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

es continua.

La elipticidad se deducirá del siguiente resultado:

Proposición (Desigualdad de Korn) *Existe* $c = c(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) \geq c \, \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

A partir de allí, la siguiente deducción es sencilla

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) = 2\mu \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}) \, (\operatorname{div} \mathbf{u}) \\ &\geq 2\mu \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) \geq 2\mu \, c \, \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

De ella se deduce la elipticidad de la forma bilineal, luego la existencia y unicidad de solución del problema variacional (y equivalentemente del problema de minimización).

Vamos finalmente a deducir la ecuación en derivadas parciales asociada. Por abreviar escribiremos simplemente σ, teniendo bien claro que $\sigma = \sigma(\mathbf{u})$. Sean $\boldsymbol{\sigma}_i$ las filas (o las columnas; da igual puesto que σ es simétrica) de σ. Es fácil comprobar que

$$\sigma : \varepsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^d \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla v_i.$$

Así, tenemos que el problema variacional implica

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla v_i = \sum_{i=1}^d f_i \, v_i, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Aquí tenemos agrupadas d ecuaciones variacionales: cada índice i da una ecuación. Separándolas (tomamos un test igual a v y los otros iguales a cero) obtenemos

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla v = \int_\Omega f_i \, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad i = 1, \ldots, d,$$

o equivalentemente (el razonamiento lo realizamos con detalle en la Lección 2)

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f_i \, \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad i = 1, \ldots, d,$$

que, en el sentido de distribuciones no es más que la ecuación

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_i = f_i, \qquad i = 1, \ldots, d.$$

Escribiendo el vector
$$\operatorname{div}\sigma = (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_i)_{i=1}^d$$
(aplicar la divergencia fila a fila al tensor σ), las ecuaciones se pueden agrupar en forma conjunta
$$-\operatorname{div}\sigma = \mathbf{f}.$$
Hemos demostrado que el problema variacional (y el problema de minimización) equivalen a
$$\left\{\begin{aligned} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, &\quad \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, &\quad \text{en } \Gamma. \end{aligned}\right.$$
Hay una cierta tradición en escribir la ecuación en la siguiente forma
$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0},$$
con datos y operador en el mismo lado de la ecuación. Cómo depende σ de $\mathbf{u}$ se entiende implícitamente o se especifica aparte. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones de Navier** o **ecuaciones de Lamé** o simplemente ecuaciones de la elasticidad lineal.

Ejercicio. *Siguiendo paso a paso las deducciones realizadas para el problema de Dirichlet no homogéneo del laplaciano, da una formulación del problema*
$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0}, &\quad \textit{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_0, &\quad \textit{en } \Gamma. \end{aligned}\right.$$
Escribe también el problema de minimización asociado.

Comentario. El problema de elasticidad natural es tridimensional ($d = 3$). Los problemas bidimensionales son dos:

- Problema de deformaciones planas
- Problema de tensiones planas.

En ambos casos las ecuaciones adquieren exactamente el mismo aspecto. Simplemente cambian las constantes de Lamé, que son las de dimensión tres para el problema de desplazamientos planos y las constantes
$$\mu^* = \mu, \qquad \lambda^* = \frac{2\,\lambda\,\mu}{\lambda + \mu}.$$
para el problema de tensiones planas. □

Ejercicio. *Demuestra que las ecuaciones*
$$\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$
se pueden escribir
$$\mu\,\Delta u_i + (\lambda + \mu)\partial_{x_i}(\operatorname{div}\mathbf{u}) + f_i = 0.$$

3. Problema libre y movimientos rígidos

Tomamos ahora

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \qquad \mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Gamma),$$

y nos planteamos el problema de minimización

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) - \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u} - \int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{u} = \text{mín!}, \qquad \mathbf{u} \in H^1(\Omega),$$

que es equivalente al problema variacional

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{v}, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \end{array}\right.$$

Exactamente el mismo razonamiento que antes (ya que hacer tests con funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ ignora el nuevo término integral en Γ) demuestra que la solución de este problema, si la hay, cumple la ecuación

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Aquí hay dos cuestiones diferentes, que hacen que este problema se asemeje al problema de Neumann para el laplaciano:

- Por un lado está ver a qué problema de contorno corresponde este problema variacional. Esto nos requerirá escribir una fórmula similar a la fórmula de Green, pero especializada para la elasticidad.

- Por otro lado está el estudio de la existencia y unicidad de solución, que vamos a detallar bastante menos.

Reescribiendo cuidadosamente los términos, se deduce fácilmente que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\operatorname{div}\sigma)\cdot\mathbf{v} + \int_\Omega \sigma : \varepsilon(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^d \left(\int_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_i)\, v_i + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_i\cdot\nabla v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^d \int_\Gamma (\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\mathbf{n})\, v_i \\ &= \int_\Gamma (\sigma\,\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Al campo vectorial $\sigma\,\mathbf{n} : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ se le denomina tracción normal. Escribiendo otra vez la fórmula en términos del campo de desplazamientos $\mathbf{u}$, tenemos

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}))\cdot\mathbf{v} + \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_\Gamma (\sigma(\mathbf{u})\,\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Esta fórmula se denomina **primera fórmula de Betti**.

Comentario. Para que todo esto tenga sentido basta con que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ (esto es, cada u_i está en $H^2(\Omega)$). En general la solución de la ecuación

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Omega,$$

no tiene por qué estar en ese espacio. En ese caso, la fórmula tiene sentido ampliando el significado de la integral sobre Γ a algo más débil. $\square$

Ejercicio. *Sea* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ *una solución de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \end{array} \right.$$

(aún no hemos demostrado que exista ni que sea única). Demuestra que

$$\left\{ \begin{array}{rl} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0}, & \textit{en } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u})\, \mathbf{n} = \mathbf{g}, & \textit{en } \Gamma. \end{array} \right.$$

Falta por tanto estudiar las cuestiones de existencia y unicidad de solución. La cuestión es la siguiente. Un **movimiento rígido infinitesimal** en dimensión tres es un campo de desplazamientos de la forma

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x},$$

con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ constantes. Escrito matricialmente, un movimiento rígido es

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

En dimensión dos, los movimientos rígidos infinitesimales son los campos de desplazamientos de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{M}_d$ el espacio de movimientos rígidos infinitesimales en dimensión d. Entonces $\dim \mathcal{M}_2 = 3$ y $\dim \mathcal{M}_3 = 6$. Además,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{M}_d \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon(\mathbf{u}) = 0$$

(los movimientos rígidos no producen deformación). La implicación a derecha es trivial (es una comprobación), mientras que la contraria es algo más complicada. A partir de allí, se obtiene lo siguiente:

- El problema

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega),\\ \displaystyle\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}):\varepsilon(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{v}, \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega),\end{array}\right.$$

  tiene solución si y sólo si

$$\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{w} + \int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{0}, \qquad \forall\mathbf{w}\in\mathcal{M}_d.$$

  Esto suponen tres condiciones de compatibilidad en dimensión dos y seis en dimensión tres.

- En caso de que se cumplan las condiciones de compatibilidad la solución existe salvo movimiento rígido aditivo.

- El estudio se realiza sobre el espacio

$$V := \left\{\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega)\,\middle|\, \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \forall\mathbf{w}\in\mathcal{M}_d\right\},$$

  gracias al siguiente resultado, que generaliza la desigualdad de Korn.

Proposición (Desigualdad de Korn generalizada) *Supongamos que V es un subespacio cerrado de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que*

$$V\cap\mathcal{M}_d = \{\mathbf{0}\}.$$

Entonces existe $\alpha>0$ (que depende del subespacio V) tal que

$$\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}):\varepsilon(\mathbf{u}) \ge \alpha\,\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega}, \qquad \forall\mathbf{u}\in V.$$

Comentario. Los movimientos rígidos infinitesimales son linealizaciones de los campos de desplazamientos que producen movimientos rígidos de verdad, esto es, traslaciones más rotaciones. Las traslaciones quedan tal cual al linealizar. El término matricial resultante en los movimientos rígidos infinitesimales proviene de linealizar en los ángulos de rotación. □

4. Más problemas de elasticidad lineal

4.1. Materiales heterogéneos

Manteniendo la linealidad y la isotropía se puede trabajar fácilmente con una ley de Hooke no homogénea

$$\sigma = 2\mu\,\varepsilon + \lambda(\operatorname{tr}\varepsilon)\,I$$

donde $\lambda, \mu : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas, posiblemente discontinuas, $\lambda(\mathbf{x}) \geq 0$ y $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 > 0$. La formulación variacional emplea entonces la forma bilineal

$$\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mu\, \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) + \int_\Omega \lambda\, (\operatorname{div} \mathbf{u})\, (\operatorname{div} \mathbf{v}).$$

En la formulación variacional las discontinuidades de los coeficientes se incorporan de forma natural, imponiendo sin ningún esfuerzo la continuidad del campo de desplazamientos y del campo de tensiones normales en cualquier discontinuidad de los coeficientes.

El caso más general que se cubre con la teoría lineal es el de los sólidos con comportamiento lineal pero heterogéneo y anisótropo. La ley de Hooke pasa a ser una ley

$$\sigma_{ij} = \textstyle\sum_{k,l=1}^d C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}.$$

Los coeficientes cumplen las siguientes reglas:

(a) Para todo i, j, k, l
$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}.$$

(b) Son acotados
$$C_{ijkl}(\mathbf{x}) \leq C \text{ (ctp)}.$$

(c) Se tiene la siguiente relación de positividad
$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} C_{ijkl} \xi_{ij}\, \xi_{kl} \geq \alpha_0 \sum_{i,j=1}^{d} \xi_{ij}^2, \qquad \text{(ctp)}, \qquad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Las hipótesis (a) sirven para garantizar que el campo de tensiones es simétrico, esto es, que
$$\sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) = \varepsilon(\mathbf{u}) : \sigma(\mathbf{v})$$
y que se eliminan redundancias de posibles coeficientes que *no se ven* en la forma cuadrática. La condición (b) sirve para garantizar que la forma bilineal

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})$$

es continua en $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Esta forma es simétrica gracias a parte de la hipótesis (a). La condición (c) permite demostrar fácilmente que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha_0 \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}),$$

lo que nos deja en condiciones de aplicar la desigualdad de Korn o su generalización. Es una mera comprobación, que se limita a releer todo lo anterior, ver que se pueden emplear los resultados sobre existencia y unicidad (con las condiciones de compatibilidad y falta de unicidad del problema de Neumann) a esta nueva situación sin realizar ninguna operación adicional.

4.2. Problemas mixtos

Ejercicio. *(Este ejercicio se puede hacer con la Ley de Hooke o con un material heterogéneo anisótropo en las condiciones anteriores). Considera que la frontera del dominio Ω está subdividida en dos subfronteras Γ_D y Γ_N, con Γ_D no trivial y sin solapamiento entre ambas. Considera el problema*

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0}, &\quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, &\quad \text{en } \Gamma_D, \\ \sigma(\mathbf{u})\, \mathbf{n} = \mathbf{g}, &\quad \text{en } \Gamma_N \end{aligned} \right.$$

con datos $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_N)$.

(a) Escribe la formulación variacional del problema.

(b) Escribe el problema de minimización asociado.

(c) Demuestra que en el espacio

$$V := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \,|\, \gamma_D \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

(γ_D es la traza en Γ_D) se tiene elipticidad de la forma bilineal.

(d) Escribe la formulación asociada para el caso en que la condición de Dirichlet (en Γ_D) no es homogénea.

5. Placa de Kirchhoff encastrada

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la posición de referencia plana de una placa. Buscamos un campo escalar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ correspondiente a desplazamientos verticales de la placa. La energía elástica en el **modelo de placa de Kirchhoff** (también llamado de Kirchhoff–Love) viene dada por

$$\frac{\nu}{2} \int_\Omega |\Delta u|^2 + \frac{1-\nu}{2} \int_\Omega Hu : Hu,$$

donde Hu es la matriz Hessiana

$$(Hu)_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

La constante $\nu \in (0, 1/2)$ se denomina **módulo de Poisson**. La energía elástica está asociada a la siguiente forma bilineal:

$$a(u, v) := \nu \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + (1-\nu) \int_\Omega Hu : Hv.$$

El espacio donde trabajaremos será

$$H^2(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall |\alpha| \le 2 \right\},$$

en el que se considera el producto escalar

$$(\!(u,v)\!)_{2,\Omega} := \int_\Omega u\,v + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega Hu : Hv.$$

Comentario. Este espacio ya nos lo encontramos anteriormente. Hemos cambiado levemente el producto escalar para simplificar su expresión: nota que ahora el término de segunda derivada cruzada $\partial^2_{x_1x_2}u\,\partial^2_{x_1x_2}v$ aparece dos veces en el producto escalar. Esto no cambia nada. $\Box$

Ejercicio. *Demuestra que la forma bilineal es continua en el espacio $H^2(\Omega)$.*

La forma bilineal está asociada al operador bilaplaciano

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$$

como se demuestra en el siguiente ejercicio.

Ejercicio. *Demuestra que*

$$\nu\int_\Omega \Delta u\,\Delta\varphi + (1-\nu)\int_\Omega Hu : H\varphi = \int_\Omega f\,\varphi, \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),$$

si y solo si

$$\Delta^2 u = f, \qquad \textit{en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Nota que el parámetro ν no aparece en la ecuación. Como veremos en la siguiente sección, ν tiene una gran relevancia en las condiciones de contorno naturales asociadas al problema.

El problema de la **placa encastrada** se plantea en el siguiente espacio (las restricciones a Γ son siempre en el sentido de trazas)

$$\begin{aligned} H_0^2(\Omega) &:= \{u\in H^2(\Omega)\,|\,\gamma u = \partial_\nu u = 0, \quad \text{en } \Gamma\} \\ &= \{u\in H^2(\Omega)\,|\,u=0, \nabla u = 0, \quad \text{en } \Gamma\} \\ &= \{u\in H^2(\Omega)\,|\,u, \partial_{x_1}u, \partial_{x_2}u \in H_0^1(\Omega)\} \end{aligned}$$

Además, $u\in H_0^2(\Omega)$ si y solo si

$$\textit{existe } (\varphi_n)\subset\mathcal{D}(\Omega) \textit{ tal que } \|u-\varphi_n\|_{2,\Omega} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Todo lo que sigue se demuestra con razonamientos idénticos a los que ya hemos empleado varias veces: dado $f\in L^2(\Omega)$, el problema de minimización

$$\frac{\nu}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 + \frac{1-\nu}{2}\int_\Omega Hu : Hu - \int_\Omega f\,u = \text{mín!}, \qquad u\in H_0^2(\Omega),$$

el problema variacional

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^2(\Omega), \\ \nu \displaystyle\int_\Omega \Delta u\,\Delta v + (1-\nu)\int_\Omega Hu : Hv = \int_\Omega f\,v, \qquad \forall v \in H_0^2(\Omega), \end{array}\right.$$

y el problema de contorno

$$\left\{\begin{array}{rl} \Delta^2 u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{array}\right.$$

son equivalentes. El único detalle que falta es probar la elipticidad de la forma bilineal. Ésta se deduce primero de notar que

$$a(u,u) \geq (1-\nu)\int_\Omega Hu : Hu$$

($1-\nu > 0$) y de que, aplicando dos veces la desigualdad de Poincaré (a las segundas derivadas y luego a las primeras), se tiene que

$$\int_\Omega Hu : Hu \geq \alpha\,\|u\|_{2,\Omega}^2, \qquad \forall u \in H_0^2(\Omega).$$

Ejercicio. *Escribe la formulación variacional y el problema de minimización asociado para el problema de contorno*

$$\left\{\begin{array}{rl} \Delta^2 u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = g_0, & \text{en } \Gamma, \\ \partial_\nu u = g_1, & \text{en } \Gamma, \end{array}\right.$$

donde g_0 y g_1 son funciones tales que existe $u_0 \in H^2(\Omega)$ tal que $\gamma u_0 = g_0$ y $\partial_\nu u_0 = g_1$. Demuestra existencia y unicidad (Ayuda: de nuevo se trata de repetir el argumento del problema de Dirichlet no homogéneo para el laplaciano).

6. Momento de flexión y fuerza transversal

Si no ponemos ninguna condición de contorno esencial en el problema de placa y planteamos el problema de minimización (como siempre, $f \in L^2(\Omega)$)

$$\frac{\nu}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 + \frac{1-\nu}{2}\int_\Omega Hu : Hu - \int_\Omega f\,u = \text{mín!}, \qquad u \in H^2(\Omega),$$

nos encontramos con el siguiente problema variacional

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^2(\Omega), \\ \nu \displaystyle\int_\Omega \Delta u\,\Delta v + (1-\nu)\int_\Omega Hu : Hv = \int_\Omega f\,v, \qquad \forall v \in H^2(\Omega). \end{array}\right.$$

Este es un problema de **placa libre**. Restringiendo los tests a $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^2_0(\Omega) \subset H^2(\Omega)$; se obtiene que cualquier solución de este problema cumple la ecuación

$$\Delta^2 u = f, \qquad \text{en } \Omega.$$

Los **movimientos rígidos** correspondientes a este problema son todos los desplazamientos verticales planos

$$u(x_1, x_2) = a_0 + a_1\, x_1 + a_2\, x_2, \qquad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

es decir, las funciones del espacio de polinomios de grado menor igual que uno, que denotaremos $\mathbb{P}_1$. Como en la formulación variacional sólo hay derivadas segundas, estas funciones se cancelan al realizar la formulación variacional y plantean un problema de unicidad similar al de las funciones constantes para el laplaciano y los movimientos rígidos infinitesimales para las ecuaciones de Navier–Lamé.

Aplicando la desigualdad de Poincaré generalizada dos veces se demuestra fácilmente que

$$\int_\Omega Hu : Hu \geq \alpha \,\|u\|^2_{2,\Omega}, \qquad \forall u \in V,$$

siempre que V sea un subespacio cerrado de $H^2(\Omega)$ tal que $V \cap \mathbb{P}_1 = \{0\}$. Esto impone condiciones de compatibilidad sobre el dato f y se puede emplear para redefinir el problema variacional de manera que haya unicidad. Este tipo de argumentos se puede deducir de una forma unificada con la teoría que veremos en el próximo capítulo, así que no repetiremos los pasos de nuevo.

Lo que sí es interesante es ver qué condiciones de contorno naturales está cumpliendo la solución del problema de capa libre. El resultado para las ecuaciones de la placa de Kirchhoff (equivalente a la fórmula de Green para el laplaciano y a la de Betti para las ecuaciones de la elasticidad lineal) se denomina **fórmula de Rayleigh–Green**: en condiciones suficientes de regularidad,

$$\int_\Omega (\Delta^2 u)\, v - \left(\nu \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + (1-\nu) \int_\Omega Hu : Hv \right) = \int_\Gamma (\mathcal{B}_1 u)\, v - (\mathcal{B}_2 u)\, \partial_\nu v,$$

donde

$$\mathcal{B}_1 u := \partial_\nu(\Delta u) + (1-\nu)\partial_\tau \Big((n_1^2 - n_2^2)\, \partial^2_{x_1 x_2} u - n_1 n_2 (\partial^2_{x_1 x_1} u - \partial^2_{x_2 x_2} u) \Big)$$

es el **momento de flexión** y

$$\mathcal{B}_2 u := \Delta u - (1-\nu) \Big(n_2^2\, \partial^2_{x_1 x_1} u + n_1^2\, \partial^2_{x_2 x_2} u - 2\, n_1 n_2\, \partial^2_{x_1 x_2} u \Big)$$

es la **fuerza transversal**. En la definición de $\mathcal{B}_1$ aparece la derivada tangencial:

$$\partial_\tau \omega := \nabla u \cdot (-n_2, n_1).$$

Comentario. Las expresiones diferenciales que aparecen en las dos condiciones de contorno naturales se pueden interpretar de una forma más clara. El término

$$(n_1^2 - n_2^2)\,\partial^2_{x_1x_2}u - n_1n_2(\partial^2_{x_1x_1}u - \partial^2_{x_2x_2}u)$$

es la parte de segundo orden de la derivada $\partial^2_{\tau\nu}u$, esto es, en esa segunda derivada direccional se ignora que los vectores normal y tangencial varían debido a la curvatura de la frontera y se tratan como si fueran constantes alrededor del punto. Igualmente

$$n_2^2\,\partial^2_{x_1x_1}u + n_1^2\,\partial^2_{x_2x_2}u - 2\,n_1n_2\,\partial^2_{x_1x_2}u$$

corresponde al término de segundo orden de $\partial^2_{\tau\tau}$. $\Box$

Las expresiones concretas de las condiciones naturales no son importantes puesto que las condiciones se incorporan de forma natural a la formulación variacional. Nota en cambio que el operador de frontera $\mathcal{B}_2$ contiene únicamente derivadas segundas y que $\mathcal{B}_1$ contiene derivadas segundas y terceras. Así

$$\mathcal{B}_1u = \mathcal{B}_2u = 0, \qquad \forall u \in \mathbb{P}_1.$$

Como consecuencia de la fórmula de Rayleigh–Green y puesto que la solución del problema

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^2(\Omega), \\ \displaystyle \nu\int_\Omega \Delta u\,\Delta v + (1-\nu)\int_\Omega Hu : Hv = \int_\Omega f\,v, \qquad \forall v \in H^2(\Omega), \end{array}\right.$$

cumple $\Delta^2 u = f$ se tiene que

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta^2 u = f, & \text{en } \Omega, \\ \mathcal{B}_2 u = 0, & \text{en } \Gamma, \\ \mathcal{B}_1 u = 0, & \text{en } \Gamma. \end{array}\right.$$

En suma: hay cuatro condiciones de contorno asociadas al problema de placa de Kirchhoff. Dos de ellas son esenciales (traza y derivada normal) y se imponen fuera de la ecuación variacional. Las otras dos (momento de flexión y fuerza transversal) son naturales y aparecen incorporadas a la formulación.

Ejercicio. *Escribe la formulación variacional y el problema de minimización asociados al problema*

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta^2 u = f, & \textit{en } \Omega, \\ \mathcal{B}_2 u = g_2, & \textit{en } \Gamma, \\ \mathcal{B}_1 u = g_3, & \textit{en } \Gamma. \end{array}\right.$$

Ejercicio. *Escribe la formulación variacional y el problema de minimización asociados al problema de* **placa simplemente apoyada**

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta^2 u = f, & \textit{en } \Omega, \\ u = 0, & \textit{en } \Gamma, \\ \mathcal{B}_2 u = 0, & \textit{en } \Gamma. \end{array}\right.$$

Ejercicio. *Escribe la formulación variacional y el problema de minimización asociados al problema de* **placa rodante**

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \textit{en } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0, & \textit{en } \Gamma, \\ \mathcal{B}_1 u = 0, & \textit{en } \Gamma. \end{cases}$$

Comentario. En breve, veamos las cuestiones de unicidad:

- En el problema de placa libre (condiciones sobre $\mathcal{B}_1 u$ y $\mathcal{B}_2 u$) hay un subespacio de movimientos rígidos con dimensión tres y se deben cumplir tres condiciones de compatibilidad de los datos.
- En el problema de placa simplemente apoyada (condiciones sobre u y $\mathcal{B}_2 u$) se cumple la hipótesis de elipticidad.
- Por último, en el problema de placa rodante (condiciones sobre $\partial_\nu u$ y $\mathcal{B}_1 u$) los desplazamientos verticales paralelos a la placa en reposo ($u \in \mathbb{P}_0$) generan una cierta falta de unicidad y fuerzan una condición de compatibilidad.

$\square$

La frontera se puede también dividir en cuatro partes y en cada una de ellas imponer uno de los cuatro pares de condiciones anteriores. Los pares de condiciones

$$(u, \mathcal{B}_1 u), \qquad (\partial_\nu u, \mathcal{B}_2 u)$$

son incompatibles. Por un lado, en la fórmula de Rayleigh–Green aparecen emparejados y es imposible imponer una como natural y la otra como esencial a la vez. Esto también se puede ver claramente en la forma del problema de minimización. El problema se puede escribir en la forma más general como:

$$\frac{\nu}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 + \frac{1-\nu}{2}\int_\Omega Hu : Hu - \int_\Omega f\, u + \int_{\Gamma_1} h_1\, u - \int_{\Gamma_2} h_2\, \partial_\nu u = \text{mín!}, \qquad \begin{aligned} u &\in H^2(\Omega), \\ u &= g_0 \text{ en } \Gamma\backslash\Gamma_1, \\ \partial_\nu u &= g_1 \text{ en } \Gamma\backslash\Gamma_2. \end{aligned}$$

De allí salen las condiciones naturales

$$\mathcal{B}_1 u = h_1, \text{ en } \Gamma_1, \qquad \mathcal{B}_2 u = h_2, \text{ en } \Gamma_2.$$

Lección 5

La Alternativa de Fredholm

En esta lección introducimos una serie de conceptos nuevos en el marco de los problemas hilbertianos que hemos venido desarrollando. Hay dos motivaciones para ello. La primera es intentar buscar un patrón en la falta de unicidad para problemas de tipo Neumann (constantes en Laplace, movimientos rígidos en Navier–Lamé y desplazamientos planos en Kirchhoff) y en el hecho de que hay que imponer una serie de condiciones de compatibilidad a los datos. La segunda es intentar abordar algún tipo de problema de contorno donde los términos de mayor orden sí son elípticos pero aparecen términos de orden bajo que rompen la elipticidad. La compacidad va a ser el concepto clave en este análisis.

1. Convergencia débil y compacidad

Consideremos un espacio de Hilbert H. Decimos que una sucesión $(u_n) \subset H$ es débilmente convergente y escribiremos

$$u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u, \qquad \text{en } H,$$

cuando

$$(u_n, v) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, v), \qquad \forall v \in H.$$

Como consecuencia simple de la desigualdad de Cauchy–Schwarz se ve que

$$|(u_n, v) - (u, v)| \le \|u_n - u\|\,\|v\|, \qquad \forall v \in H,$$

luego la convergencia en H (que se dice normalmente convergencia fuerte para distinguir) implica la **convergencia débil**. Al revés no ocurre. Recuerda que la convergencia fuerte es simplemente la convergencia en norma $\|u_n - u\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ejercicio. *Demuestra que si u y u' son dos posibles límites débiles de un sucesión, entonces deben coincidir (basta tomar $v = u - u'$).*

Comentario. La convergencia débil es un fenómeno netamente infinito–dimensional. En dimensión finita la convergencia débil implica la convergencia componente a componente y éste implica la convergencia fuerte. En dimensión infinita, esto no es suficiente. $\square$

Las aplicaciones lineales y continuas no sólo conservan la convergencia fuerte, sino también la débil:

Teorema *La convergencia débil se preserva por operadores lineales y continuos, es decir, si H_1 y H_2 son espacios de Hilbert, $A : H_1 \to H_2$ es lineal y continuo, entonces*

$$u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u \quad \text{en } H_1 \qquad \Longrightarrow \qquad A\,u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} A\,u \quad \text{en } H_2$$

Ejercicio. *Demostrar que si $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ en $H^1(\Omega)$, entonces $\partial_{x_i} u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_{x_i} u$ en $L^2(\Omega)$.*

Ejercicio. *Sea $V \subset H$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert H. Considerando la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} V & : \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & u \end{array}$$

demuestra que las sucesiones débilmente convergentes en V lo son en H.

Si $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal continua, entonces se puede demostrar que

$$\begin{array}{l} u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u \\ v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad a(u_n, v_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a(u, v).$$

Cuando ambas convergencias pueden ser débiles y preservamos convergencia, decimos que la forma bilineal es **compacta**. Así, si $k : H \times H \to \mathbb{R}$ cumple que para dos sucesiones cualesquiera

$$\begin{array}{l} u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u \\ v_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} v \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad k(u_n, v_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} k(u, v),$$

decimos que la forma bilineal es compacta.

2. Ejemplos de formas compactas

La mayor parte de los ejemplos que vamos a encontrar en la práctica de formas compactas tienen que ver con la aparición de términos de orden bajo en los problemas de contorno. Estos resultados serán consecuencias de un importante teorema de los espacios de Sobolev, que escribimos aquí en su versión más simple.

Teorema (Teorema de Rellich) *Las sucesiones débilmente convergentes en $H^1(\Omega)$ convergen fuertemente en $L^2(\Omega)$, esto es,*

$$u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u, \quad \text{en } H^1(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

Veamos un primer ejemplo de forma bilineal compacta en $H^1(\Omega)$:

$$k(u,v) := \int_\Omega u\, v.$$

Si $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ y $v_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} v$, ambas en $H^1(\Omega)$, entonces ambas sucesiones convergen fuertemente en $L^2(\Omega)$. Como la forma bilineal es continua en $L^2(\Omega)$

$$|k(u,v)| \le \|u\|_{0,\Omega}\, \|v\|_{0,\Omega}$$

entonces es inmediato que

$$k(u_n, v_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} k(u,v).$$

Veamos otro ejemplo más difícil. Sea $k : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$k(u,v) := \int_\Omega (\mathbf{b}\cdot\nabla u)\, v.$$

Suponemos que las componentes de $\mathbf{b}$ son funciones acotadas.

Tomamos entonces dos sucesiones débilmente convergentes:

$$u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u, \qquad v_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} v, \qquad \text{en } H^1(\Omega).$$

Por un lado tenemos que

$$v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v, \qquad \text{en } L^2(\Omega),$$

por el Teorema de Rellich. Por otro lado, derivar es lineal y continuo de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ luego

$$\partial_{x_i} u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_{x_i} u, \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$

Multiplicar por una función acotada es una aplicación lineal y continua de $L^2(\Omega)$ en sí mismo, luego

$$b_i\, \partial_{x_i} u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} b_i\, \partial_{x_i} u, \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$

Finalmente, sumando, tenemos que

$$\mathbf{b}\cdot\nabla u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{b}\,\nabla u, \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$

Así, las convergencias obtenidas (una fuerte y otra débil) nos garantizan que

$$k(u_n,v_n) = \int_\Omega (\mathbf{b}\cdot\nabla u_n)\, v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega (\mathbf{b}\cdot\nabla u)\, v = k(u,v),$$

lo que demuestra que la forma bilineal es compacta.

Ejercicio. *Demuestra que si $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ en $H^2(\Omega)$, entonces $\partial_{x_i} u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \partial_{x_i} u$ en $L^2(\Omega)$ y también $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $L^2(\Omega)$. Esto demuestra una generalización del Teorema de Rellich: las sucesiones débilmente convergentes en $H^2(\Omega)$ convergen fuertemente en $H^1(\Omega)$.*

La forma bilineal

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

no es compacta en $H^1(\Omega)$. El resultado anterior demuestra que sí es compacta vista en $H^2(\Omega)$. Esto corresponderá a cómo nos encontraremos formas bilineales compactas en las formulaciones variacionales de problemas de contorno. Corresponderán siempre a términos de menor orden.

3. Alternativa de Fredholm

El siguiente resultado concierne a problemas variacionales

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = \ell(v), \qquad \forall v \in H, \end{cases}$$

donde la forma bilineal se puede descomponer como

$$a(u,v) = a_0(u,v) + k(u,v)$$

siendo $a_0(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ elíptica y $k(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ compacta.

Teorema (Alternativa de Fredholm) *Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua de forma que existe una forma bilineal compacta k tal que $a - k$ es elíptica, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que*

$$a(u,u) - k(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \qquad \forall u \in H.$$

Entonces puede ocurrir una de las dos siguientes situaciones:

(a) *El problema homogéneo tiene solución única trivial*

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = 0, \quad \forall v \in H, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad u = 0.$$

En este caso para cualquier $\ell : H \to \mathbb{R}$ lineal y continua, el problema

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in H, \end{cases}$$

tiene solución única que es función continua de los datos

$$\|u\| \leq C\,\|\ell\|_*.$$

(b) *El problema homogéneo admite un conjunto finito de soluciones linealmente independientes, esto es, existen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ linealmente independientes de forma que*

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = 0, \quad \forall v \in H, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = \xi_1\,\phi_1 + \ldots + \xi_n\,\phi_n, \quad \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}.$$

En tal caso, el problema homogéneo traspuesto tiene exactamente el mismo número de soluciones linealmente independientes, esto es, existen $\psi_1, \ldots, \psi_n$ linealmente independientes de forma que

$$\begin{cases} w \in H, \\ a(v,w) = 0, \quad \forall v \in H, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad w = \xi_1\,\psi_1 + \ldots + \xi_n\,\psi_n, \quad \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}.$$

En ese caso, el problema

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in H, \end{cases}$$

tiene solución (indeterminada en n *constantes) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones de compatibilidad*

$$\ell(\psi_1) = \ldots = \ell(\psi_n) = 0.$$

Ejercicio. *Demuestra que si* $a(u,v)$ *es simétrica, entonces las condiciones de compatibilidad se pueden tomar*

$$\ell(\phi_1) = \ldots = \ell(\phi_n) = 0.$$

Comentario. La falta de unicidad (indeterminación en n constantes) aunque se cumplan las condiciones de compatibilidad se debe a la existencia de solución homogénea. Así, si u es solución de

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = \ell(v), \qquad \forall v \in H, \end{cases}$$

es obvio que

$$u + \xi_1\,\phi_1 + \ldots + \xi_n\,\phi_n$$

también lo es para todo $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$. La continuidad respecto de los datos se produce siempre que se haga una elección fija de solución, siguiendo un criterio continuo. Se puede, por ejemplo, demostrar que la solución con mínima norma es función continua del dato

$$\operatorname{ínf}\left\{ \|u + \xi_1\,\phi_1 + \ldots + \xi_n\,\phi_n\| \,\middle|\, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R} \right\} \le C\,\|\ell\|_*.$$

□

Comentario. Aunque sin este nombre, ya te has encontrado con la Alternativa de Fredholm cuando estudiaste Álgebra Lineal. La cumplen todos los sistemas con matriz cuadrada. Si A es $N \times N$, puede ocurrir que A sea invertible, en cuyo caso también lo es $A^\top$ y los sistemas

$$Ax = b$$

tiene solución única para todo b. Si A no es invertible, el núcleo de A y el de $A^\top$ tienen exactamente la misma dimensión y el sistema $Ax = b$ tiene solución si y sólo si b es ortogonal al núcleo de $A^\top$. □

Ejercicio. *Demuestra que si el problema homogéneo*

$$\begin{cases} u \in H, \\ a(u,v) = 0, \qquad \forall v \in H, \end{cases}$$

tiene únicamente a $u = 0$ como solución, entonces, el problema traspuesto siempre tiene solución única, esto es, para todo $\mu : H \to \mathbb{R}$ lineal y continua

$$\begin{cases} w \in H, \\ a(v, w) = \mu(v), \qquad \forall v \in H, \end{cases}$$

tiene solución única.

4. Problema de Neumann para el laplaciano

Recordemos que el problema de contorno

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u = g, & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

correspondía en forma variacional con

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v + \int_\Gamma g\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Comencemos con el problema homogéneo. Si

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = 0, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

basta tomar $v = u$ para obtener que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = 0,$$

luego u es constante. Podemos tomar entonces $\phi_1 \equiv 1$. Notemos también que la forma bilineal es simétrica, luego no hace falta estudiar aparte el problema traspuesto.

Ahora escribimos la forma bilineal en la siguiente forma

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v \right) - \int_\Omega u\, v.$$

La primera parte es elíptica y la segunda es compacta, con lo que ya estamos en condiciones de aplicar el teorema de la Alternativa de Fredholm, que nos dice que el problema

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v + \int_\Gamma g\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

tiene solución si y sólo si

$$\int_\Omega f + \int_\Gamma g = 0.$$

5. Aplicación a la placa de Kirchhoff

Consideremos el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{en } \Omega, \\ \mathcal{B}_2 u = g, & \text{en } \Gamma, \\ \mathcal{B}_1 u = h, & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

Partiendo de la fórmula de Rayleigh–Green

$$\int_\Omega (\Delta^2 u)\, v - \left(\nu \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + (1-\nu) \int_\Omega Hu : Hv\right) = \int_\Gamma (\mathcal{B}_1 u)\, v - (\mathcal{B}_2 u)\, \partial_\nu v$$

podemos plantear el problema en forma variacional

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega), \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega f\, v - \int_\Gamma h\, v + \int_\Gamma g\, \partial_\nu v, \qquad \forall v \in H^2(\Omega), \end{cases}$$

siendo

$$a(u,v) := \nu \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + (1-\nu) \int_\Omega Hu : Hv$$

La forma bilineal

$$a_0(u,v) := a(u,v) + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v$$

es elíptica. El término añadido,

$$k(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v,$$

es compacto.

Ejercicio. *Demuestra que*

$$\nu \int_\Omega \Delta u\, \Delta v + (1-\nu) \int_\Omega Hu : Hv = 0, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

si y sólo si $u \in \mathbb{P}_1$ *(*$\mathbb{P}_1$ *es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que uno). Demuestra que definiendo*

$$m_0(x,y) \equiv 1, \qquad m_1(x,y) := x \qquad m_2(x,y) := y$$

el problema

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega), \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega f\, v - \int_\Gamma h\, v + \int_\Gamma g\, \partial_\nu v, \qquad \forall v \in H^2(\Omega), \end{cases}$$

tiene solución si y sólo si

$$\int_\Omega f\, m_i - \int_\Gamma h\, m_i + \int_\Gamma g\, \partial_\nu m_i = 0, \qquad i = 0,1,2.$$

Ejercicio. *Considera el problema*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{en } \Gamma, \\ \mathcal{B}_1 u = h, & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

Escribe su formulación variacional. Escribe la condición de compatibilidad de los datos f y h para que exista solución.

En este último caso es relativamente fácil ver que si la condición sobre $\partial_\nu u$ no es homogénea, hay que reescribir el problema hasta que se plantee como un problema variacional típico, al igual que hacíamos con el problema de Dirichlet no homogéneo. Una vez escrito es esa forma se ve a qué forma lineal hay que aplicar las condiciones de compatibilidad y que éstas no afectan al dato $\partial_\nu u$.

Comentario. Los problemas de elasticidad lineal con condiciones de tracción normal se pueden analizar fácilmente con esta teoría. Los movimientos rígidos infinitesimales plantean una falta de unicidad que se compensa con una serie de condiciones de compatibilidad que los datos deben satisfacer para que exista solución. □

6. Ecuación de Helmholtz

Consideremos el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$. El parámetro λ es un número real positivo. La formulación variacional de este problema es

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \lambda^2 \int_\Omega u\, v = -\int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Ejercicio. *Demuestra que la existencia y unicidad de solución para cualquier f equivale a que*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = 0.$$

La condición de unicidad del ejercicio se cumple para casi todos los valores de λ (más sobre esto ahora). Si no se cumple, por la Alternativa de Fredholm, se pueden encontrar $\phi_1^\lambda, \ldots, \phi_n^\lambda$ linealmente independientes de forma que

$$\begin{cases} \Delta\phi_i^\lambda + \lambda^2\phi_i^\lambda = 0, & \text{en } \Omega, \\ \phi_i^\lambda = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

y que éstas son todas las soluciones linealmente independientes del problema. En tal caso, la condición para existencia de solución de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \lambda^2 \int_\Omega u\, v = -\int_\Omega f\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

es que

$$\int_\Omega f\, \phi_1^\lambda = \ldots = \int_\Omega f\, \phi_n^\lambda = 0.$$

Los valores de λ para los que la unicidad falla forman una sucesión que diverge a infinito.

7. Convección–difusión

Ejercicio. *Sin llegar a probar unicidad, demuestra la relación existente entre los siguientes problemas*

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f, & en\ \Omega, \\ u = 0, & en\ \Gamma, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\nabla u + u\,\mathbf{b}) = g, & en\ \Omega, \\ u = 0, & en\ \Gamma. \end{cases}$$

En el caso unidimensional (Ω es un intervalo), demuestra que el problema traspuesto tiene solución única.

Lección 6

Valores propios de operadores diferenciales

En este capítulo vamos a tratar de conocer y entender las propiedades de los valores propios de los operadores elípticos. Los valores propios (autovalores) y las correspondientes funciones propias (autofunciones) son de gran relevancia para comprender determinados fenómenos de propagación y difusión. Una parte importante de lo que aprenderemos aquí lo desarrollaremos en la próxima lección para estudiar cualitativamente una serie de problemas evolutivos. Veremos cómo en problemas mecánicos los valores propios están fuertemente relacionados a los modos de vibración libre y, por tanto, también contienen información cuantitativa de interés.

Comenzaremos examinando un ejemplo y formulándolo en la manera correcta. Después intentaremos escribir un teorema bastante general que aplicar en cada situación. Finalmente examinaremos toda una batería de ejemplos donde esta teoría se aplica con facilidad. Respecto de la utilidad de lo aprendido aquí, pido al lector un poco de paciencia hasta que lleguemos a la próxima lección. Emplearemos de forma sistemática resultados de la lección anterior, en particular todo lo relacionado con convergencia débil, compacidad y el teorema de Rellich.

1. Valores propios Dirichlet del laplaciano

El problema es muy fácil de exponer. Tenemos un dominio acotado Ω con frontera regular a trozos llamada Γ y buscamos

$$\lambda \in \mathbb{R}, \qquad \left[\begin{array}{rl} -\Delta u = \lambda\, u, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma. \end{array} \right.$$

Antes de nada, es obvio que solo nos interesan valores de λ para los cuales la ecuación correspondiente tiene solución no nula. La solución trivial $u \equiv 0$ vale para cualquier λ y no aporta ninguna información. A λ se le llama valor propio y a u función propia.

Nos podríamos plantear el problema buscando $\lambda \in \mathbb{C}$. Para ello habría que buscar $u : \Omega \to \mathbb{C}$. De hecho, lo que ocurre es que se puede demostrar que no hay valores propios complejos para este tipo de problemas, luego nos limitaremos a buscar valores reales.

Hay problemas interesantes donde, no obstante, hay valores propios complejos. Para no complicarnos demasiado la vida, vamos a dejarlos de lado en este curso.

La formulación variacional de este problema es simple. Supongamos que λ está dado. Entonces, con lo visto en las Lecciones 2 y 3, es fácil reescribir el problema como

$$\left[\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right.$$

Lo primero que vamos a hacer es escribir este problema en una forma más abstracta. Damos nombre a la forma bilineal de la izquierda de la igualdad

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

y a la de la derecha de la igualdad

$$[u,v] := \int_\Omega u\, v.$$

Esta última forma bilineal no es más que el producto escalar de $L^2(\Omega)$. Si llamamos $V := H_0^1(\Omega)$, que es un espacio de Hilbert, el problema de valores propios es encontrar

$$\lambda \in \mathbb{R}, \qquad \left[\begin{array}{l} u \in V, \\ a(u,v) = \lambda\,[u,v], \qquad \forall v \in V, \end{array}\right.$$

entendiendo como antes que solo nos interesan los valores de λ para los cuales hay soluciones no triviales del problema.

Primer grupo de hipótesis. Tenemos un espacio de Hilbert V y una forma bilineal $a : V \times V \to \mathbb{R}$ que es

- continua,
- simétrica,
- y elíptica.

Si no recuerdas el significado de alguna de estas hipótesis, repasa las lecciones anteriores. Es importante tenerlas todas claras. □

Segundo grupo de hipótesis. Tenemos otro espacio de Hilbert H, cuyo producto escalar es $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ y suponemos que $V \subset H$ y que las sucesiones débilmente convergentes en V son fuertemente convergentes en H. □

Esta segunda hipótesis se suele leer como *la inyección de V en H es compacta.* Si $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ es el producto escalar de V, dice que

$$(u_n, v) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (u,v) \quad \forall v \in V$$

(esto es la convergencia débil en V) implica que

$$|u_n - u| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} V$$

siendo

$$|u_n - u| = [u_n - u, u_n - u]^{1/2}.$$

Es lo que le ocurre a $V = H_0^1(\Omega)$ con $H = L^2(\Omega)$ (es el Teorema de Rellich). Se puede escribir de otra manera: el producto escalar de H, visto como forma bilineal en V, es una forma bilineal compacta en V.

2. La Teoría de Hilbert–Schmidt

Vamos a escribir poco a poco los resultados que se pueden deducir para problemas

$$\lambda \in \mathbb{R}, \qquad \left[\begin{array}{l} u \in V, \\ a(u,v) = \lambda\,[u,v], \qquad \forall v \in V, \end{array}\right.$$

si se cumplen ambos grupos de hipótesis. Los resultados se pueden recoger en un único teorema (que no llegaremos a enunciar) y que es una variante de un importante teorema de análisis funcional: el Teorema de Hilbert–Schmidt. No obstante, puesto que lo vamos a escribir completamente particularizado a nuestros objetivos, no vamos a ver este resultado en el lenguaje de teoría de operadores en el que suele ser escrito.

Primera propiedad. *Los valores propios son positivos.* Esto es fácil de ver. Si $u \neq 0$ es una función propia, entonces

$$a(u,u) = \lambda\,[u,u].$$

Así pues

$$\lambda = \frac{a(u,u)}{[u,u]} = \frac{a(u,u)}{|u|^2} > 0.$$

A este tipo de expresión se le suele llamar un **cociente de Rayleigh**. Nota por ejemplo cómo en el ejemplo del laplaciano el cociente toma la forma

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2}.$$

Segunda propiedad. *Funciones propias correspondientes a valores propios distintos son necesariamente ortogonales en H.* Supongamos que

$$\left[\begin{array}{l} u_1 \in V, \\ a(u_1,v) = \lambda_1\,[u_1,v], \qquad \forall v \in V, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} u_2 \in V, \\ a(u_2,v) = \lambda_2\,[u,v], \qquad \forall v \in V, \end{array}\right.$$

y que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tomamos $v = u_2$ en la primera ecuación y $v = u_1$ en la segunda. Entonces

$$\lambda_1 [u_1, u_2] = a(u_1, u_2) = a(u_2, u_1) = \lambda_2 [u_1, u_2],$$

luego

$$(\lambda_1 - \lambda_2) [u_1, u_2] = 0.$$

Por tanto,

$$[u_1, u_2] = 0$$

y las funciones propias son ortogonales.

Tercera propiedad. *Los valores propios no se pueden aproximar a cero.* Sea α la constante de elipticidad de la forma bilineal $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, esto es,

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Si u es función propia asociada al valor propio λ, entonces

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) = \lambda [u, u] \leq C\lambda \|u\|^2.$$

La última desigualdad es consecuencia del siguiente hecho: si la forma bilineal $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ es compacta en V, necesariamente es continua, luego tiene que existir una constante C tal que

$$\Big|[u, v]\Big| \leq C\|u\| \, \|v\|, \qquad \forall u, v \in V.$$

Mirando de nuevo la desigualdad obtenida cinco líneas atrás, tenemos que

$$\lambda \geq \alpha / C > 0.$$

Cuarta propiedad. *A cada valor propio le corresponde un número finito de funciones propias linealmente independientes.* Antes de hacer nada, hay que notar que si λ es un valor propio, el conjunto de sus funciones propias es un subespacio vectorial de V, esto es, las combinaciones lineales de funciones propias del mismo valor propio son de nuevo funciones propias. Esto es una comprobación elemental.

Tomemos λ fijo. Miremos entonces el problema de la siguiente manera

$$\left[\begin{array}{l} u \in V, \\[1ex] \widetilde{a}(u, v) := a(u, v) - \lambda [u, v] = 0, \end{array}\right.$$

La forma bilineal $\widetilde{a}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ es suma de una forma elíptica y otra compacta (¿lo ves?). Por tanto estamos en las hipótesis de la alternativa de Fredholm y el número de soluciones linealmente independientes es finito o nulo en caso de que λ no sea valor propio.

Quinta propiedad. *En cada intervalo finito de $\mathbb{R}$ hay solo un número finito de valores propios, pero el número total de valores propios no es finito.* Esta doble propiedad es algo más compleja y ya no vamos a dar su demostración. Vamos en todo caso a extraer unas cuantas consecuencias de esta propiedad y de las anteriores.

Si vamos mirando los valores propios que hay en cada uno de los intervalos $[n, n+1)$, siempre tenemos un número finito de ellos, así que podemos ir contándolos. Así pues podemos ir numerándolos de menor a mayor

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_m < \ldots.$$

La segunda parte de la propiedad anterior dice, ya para empezar que sí hay valores propios. Además dice que nunca los tenemos todos. Si contamos todos los que hay entre 0 y n (que son un número finito), siguen faltándonos, luego podemos seguir añadiendo valores propios, que cada vez serán mayores. En particular, la sucesión de valores propios diverge a infinito.

$$\lambda_m \to \infty.$$

Con ayuda de la tercera y la cuarta propiedad vamos a renumerar los valores propios y contar todas las funciones propias. Lo primero es un detalle algebraico: puesto que para cada valor propio λ tenemos un número finito de funciones propias linealmente independientes (posiblemente sólo una), podemos construir un conjunto de funciones propias

$$u_1^\lambda, \ldots, u_k^\lambda$$

que generen todas las funciones propias asociadas a λ y que sean ortonormales en H

$$[u_i^\lambda, u_j^\lambda] = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Esto se puede hacer aplicando simplemente el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt que funciona en cualquier espacio con producto escalar. Las funciones propias así escogidas son ortogonales entre sí, puesto que lo son para el mismo valor propio por esta construcción y los son si son asociadas a distintos valores propios.

Comenzamos ahora con el valor propio menor. Lo repetimos tantas veces como funciones propias linealmente independientes tengamos. A esto se le llama la *multiplicidad del valor propio*. Fíjate bien que aquí no hay polinomio característico como con las matrices y la multiplicidad se mira únicamente mirando cuántas funciones propias hay. Seguidamente vamos con el segundo valor propio y hacemos lo mismo, etc, etc. Lo que hemos hecho así es construir una sucesión

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots \qquad \lambda_n \to \infty$$

donde los valores pueden repetirse, pero solo un número finito de veces cada uno. Asociado a cada valor λ_n tenemos una función u_n, de manera que

$$\left[\begin{array}{l} u_n \in V, \\ a(u_n, v) = \lambda_n \, [u_n, v], \qquad \forall v \in V, \end{array}\right.$$

y que

$$[u_n, u_m] = \delta_{nm}.$$

Fíjate que no hemos cambiado el nombre de los elementos de la sucesión de valores propios pero que, hablando con rigor, es una sucesión distinta. La primera vez contenía sólo los valores distintos y ahora están repetidos tantas veces como su multiplicidad indique.

Una consecuencia simple de la ortogonalidad de las funciones propias es la siguiente propiedad

$$a(u_n, u_m) = \lambda_n \, \delta_{nm}.$$

Con esta forma de numerar los valores y funciones propias, ya podemos enunciar la última propiedad, que tampoco es nada fácil de probar.

Sexta propiedad. *El conjunto de funciones propias es ortogonal completo en H.* Esto hay que leerlo de la siguiente manera: no existe ninguna función en H que sea ortogonal a todas las funciones propias y no sea la función nula. Escrito en forma más matemática

$$\begin{array}{c} u \in H \\ [u, u_n] = 0, \quad \forall n \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad u = 0.$$

Que a esto se le diga conjunto ortogonal completo obedece a una sencilla razón: la definición indica que no se puede añadir ningún otro elemento a la sucesión manteniéndola ortogonal.

Los conjuntos ortonormales completos en un espacio de Hilbert se llaman frecuentemente **bases hilbertianas** o **bases de Hilbert.** Hay una propiedad muy importante que tienen las bases de Hilbert: la posibilidad de reconstruir cualquier elemento del conjunto a partir de ellos. En concreto, para cualquier $u \in H$ podemos escribir

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, u_n, \qquad \alpha_n := [u_n, u].$$

La serie converge en el sentido de la convergencia en H, lo cual debe ser leído como sigue

$$\Big| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \Big| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Recuerda que hemos empleado el símbolo $|\cdot|$ para la norma en H, asociada al producto escalar $[\cdot\,,\cdot]$. A este tipo de series se les denomina **series de Fourier generalizadas** puesto que los tres tipos clásicos de serie de Fourier (la de senos y cosenos, la de senos y la de cosenos) son casos particulares de éstas o, mejor dicho, porque estas series generalizan a las anteriores. Haremos parte de este trabajo en una sección próxima.

3. Valores propios del laplaciano

3.1. Valores propios Dirichlet

Ya habíamos llegado en la Sección 1 al siguiente problema

$$\left[\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u\, v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array}\right.$$

como formulación débil del problema

$$\left[\begin{array}{rl} -\Delta u = \lambda\, u, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma. \end{array}\right.$$

Recuperamos las notaciones abstractas de esa sección, con $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \qquad [u,v] = \int_\Omega u\, v.$$

Ejercicio. *Comprueba que se cumplen los dos grupos de hipótesis para poder aplicar la teoría abstracta.*

Las conclusiones de la teoría nos permiten construir una sucesión de pares de valores propios y funciones propias (λ_n, u_n)

$$\left[\begin{array}{rl} -\Delta u_n = \lambda_n\, u_n, & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{en } \Gamma, \end{array}\right.$$

de forma que

$$\int_\Omega u_n\, u_m = \delta_{nm},$$

que

$$\lambda_n > 0, \quad \forall n, \qquad\qquad \lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

y que si $u \in L^2(\Omega)$, entonces

$$u = \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_\Omega u_n\, u \Big) u_n$$

entendiendo por convergencia la de $L^2(\Omega)$ (media cuadrática)

$$\int_\Omega \Big| u - \sum_{k=1}^n \Big(\textstyle\int_\Omega u_k\, u \Big) u_k \Big|^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Hay un resultado adicional sobre los valores propios Dirichlet del laplaciano que no se deduce de la teoría general abstracta: *el valor propio menor es simple*, esto es, al valor propio Dirichlet más pequeño sólo le corresponde una función propia.

3.2. Valores propios Neumann

El problema de los valores propios Neumann del laplaciano es muy parecido pero hay que hacerle unos pequeños retoques (darle un par de martillazos) para que encaje completamente en la teoría. En forma fuerte el problema es

$$\left[\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda\, u, \quad \text{en } \Omega,\\ \partial_\nu u &= 0, \quad \text{en } \Gamma, \end{aligned}\right.$$

y en forma débil es

$$\left[\begin{array}{l} u \in H^1(\Omega),\\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array}\right.$$

Fíjate que lo que ha cambiado es el espacio V y todo lo demás es igual.

Ejercicio. *Demuestra la relación entre las formas fuerte y débil del problema.*

Antes de seguir adelante y retocar el problema, fíjate en un detalle: si tomamos $\lambda = 0$, llegamos al problema

$$\left[\begin{aligned} -\Delta u &= 0, \quad \text{en } \Omega,\\ \partial_\nu u &= 0, \quad \text{en } \Gamma, \end{aligned}\right.$$

que sí tiene soluciones no triviales, las funciones constantes y solo ellas. ¿Qué falla aquí? (Algo debe de fallar puesto que $\lambda = 0$ se ha convertido en valor propio). Lo que nos falta es la elipticidad de la forma bilineal.

Ejercicio. *Demuestra que aparte de $\lambda = 0$ todos los demás valores propios son positivos. (Idea: intenta repetir la demostración abstracta de que los valores propios son positivos y verás dónde hay que suponer que $\lambda \neq 0$).*

El truco para aplicar la teoría es muy simple. En lugar de buscar λ, buscamos $\mu = \lambda + 1$, de manera que en forma fuerte tenemos

$$\left[\begin{aligned} -\Delta u + u &= \mu\, u, \quad \text{en } \Omega,\\ \partial_\nu u &= 0, \quad \text{en } \Gamma, \end{aligned}\right.$$

y en forma débil

$$\left[\begin{array}{l} u \in H^1(\Omega),\\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \mu \int_\Omega u\, v, \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \end{array}\right.$$

¿Ves por qué?

Ejercicio. *Extrae todas las conclusiones que la teoría abstracta dice sobre los valores propios Neumann. Reescribe todos los resultados en función de los λ y no de los μ que hemos introducido para aplicar la teoría.*

4. La serie de Fourier asociada a los valores propios Dirichlet

Si has llegado a esta sección con la lengua afuera, sáltatela y ve directamente a la última sección, íntegramente dedicada a ejercicios. Retomemos los valores propios y las funciones propias Dirichlet del laplaciano y observemos de nuevo la serie

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \qquad \alpha_n = \int_\Omega u\, u_n.$$

Las sumas parciales de esta serie son

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$$

y sabemos que $s_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $L^2(\Omega)$. Como

$$\|s_n\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$$

es una magnitud acotada independientemente de n (¿por qué esta igualdad? ¿por qué esta magnitud es acotada?), necesariamente

$$\alpha_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

esto es, los coeficientes de Fourier de u tienden a cero.

Vamos un poco más allá. Supongamos que además $u \in H_0^1(\Omega)$. Tomemos las funciones

$$v_n := \frac{1}{\sqrt{\lambda_n + 1}}\, u_n,$$

que también son funciones propias y son ortogonales, pero no ortonormales. Lo que les ocurre a estas nuevas funciones es que son ortonormales, pero en $H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
(\!(v_n, v_m)\!)_{1,\Omega} &= \int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla v_m + \int_\Omega v_n\, v_m \\
&= (\lambda_n + 1) \int_\Omega v_n\, v_m = \frac{\lambda_n + 1}{\sqrt{\lambda_n + 1}\,\sqrt{\lambda_m + 1}} \int_\Omega u_n\, u_m \\
&= \delta_{nm}.
\end{aligned}$$

Este nuevo sistema ortogonal también es completo. Si $u \in H_0^1(\Omega)$

$$(\!(v_n, u)\!)_{1,\Omega} = 0, \qquad \forall n$$

entonces, como

$$\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla u + \int_\Omega v_n\, u = (\lambda_n + 1) \int_\Omega v_n\, u = \sqrt{\lambda_n + 1} \int_\Omega u_n\, u,$$

obligatoriamente $u = 0$. Así pues también tenemos una serie de Fourier para este nuevo sistema ortogonal completo. La serie se escribe ahora

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (\!(u, v_n)\!)_{1,\Omega} v_n$$

y su convergencia es con la norma de $H^1(\Omega)$. La sorpresa viene de notar que

$$(\!(u, v_n)\!)_{1,\Omega} v_n = (\lambda_n + 1)\Big(\int_\Omega u\, v_n\Big) v_n = \Big(\int_\Omega u\, u_n\Big) u_n = \alpha_n u_n$$

luego es la misma serie del principio. Esto demuestra que si $u \in H_0^1(\Omega)$ la serie de Fourier en términos de las funciones propias Dirichlet converge no solo en $L^2(\Omega)$ si no también en $H^1(\Omega)$, esto es,

$$\|s_n - u\|_{1,\Omega} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Un argumento similar al hecho antes, demuestra que los coeficientes cumplen

$$\alpha_n \sqrt{\lambda_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Habida cuenta de que $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ esto exige que los coeficientes de Fourier de una función de $H_0^1(\Omega)$ converjan a cero más rápido que los de una función de $L^2(\Omega)$.

Tomemos ahora el problema de Dirichlet homogéneo

$$\left[\begin{array}{rl} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{array}\right.$$

con $f \in L^2(\Omega)$. Descomponemos f en su serie de Fourier asociada a los valores propios Dirichlet:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_\Omega u_n\, f\Big) u_n$$

y construimos

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \Big(\int_\Omega u_n\, f\Big) u_n.$$

Empleando con cuidado los argumentos anteriores, se puede ver (es fácil pero no completamente obvio) que la serie anterior converge en $H^1(\Omega)$ a $u \in H_0^1(\Omega)$, que es la solución del problema de contorno. Que $-\Delta u = f$ lo puedes obtener, al menos informalmente, aplicando el laplaciano a ambos lados de la definición de u y sustituyendo que $-\Delta u_n = \lambda_n u_n$.

Esto viene a decir lo siguiente: *si conocemos el sistema de valores propios y funciones propias Dirichlet del laplaciano tenemos una forma de resolver exactamente el problema de Dirichlet homogéneo para cualquier término independiente.* La afirmación puede sonar muy interesante pero tiene dos problemas: (a) la solución exacta viene dada en forma de una serie, no de una expresión analítica, que requiere calcular los coeficientes de Fourier del término independiente previamente; (b) aún más difícil resulta conocer el sistema de valores y funciones propias completo. Esto sólo es factible en dominios muy simples.

5. Series de Fourier clásicas

Ejercicio. *En el caso unidimensional, el problema de los valores propios Dirichlet es*

$$\left[\begin{array}{ll} -u'' = \lambda\, u, & \text{en } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. & \end{array}\right.$$

(a) *Sin emplear los resultados teóricos todavía, demuestra que los valores propios y funciones propias (ya normalizadas) son*

$$\lambda_n = \pi^2\, n^2, \qquad u_n = \sqrt{2}\, \operatorname{sen}(n\,\pi\, \cdot\,).$$

Por tanto, todos los valores propios son simples.

(b) *¿Qué puedes deducir sobre el sistema de senos $\sqrt{2}\, \operatorname{sen}(n\pi\,\cdot\,)$ empleando la teoría anterior? ¿Cuál es la serie de Fourier asociada?*

Esta es la llamada serie de Fourier de senos.

Ejercicio. *Repite el ejercicio anterior con el problema de Neumann:*

$$\left[\begin{array}{ll} -u'' = \lambda\, u, & \text{en } (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. & \end{array}\right.$$

El sistema obtenido incluirá a una función constante (asociada a $\lambda = 0$) y las funciones $\cos(n\,\pi\,\cdot\,)$. La serie de Fourier obtenida es la serie de cosenos y todos los valores propios vuelven a ser simples.

En caso de curiosidad, la serie de Fourier de senos y cosenos (todos a la vez) surge de un problema parecido que en lugar de las condiciones de contorno habituales tiene condiciones periódicas

$$\left[\begin{array}{ll} -u'' = \lambda\, u, & \text{en } (-1,1), \\ u(-1) = u(1), & \\ u'(-1) = u'(1). & \end{array}\right.$$

Los valores propios serán todos dobles con la excepción del valor $\lambda = 0$ que volverá a ser simple.

En la próxima lección veremos un ejemplo más complicado, asociado al sistema de la elasticidad, donde veremos cómo los valores propios son los modos de vibración elástica de un sólido.

Lección 7

Procesos de difusión

En este capítulo vamos a ver un par de enfoques para tratar las ecuaciones en derivadas parciales asociadas a problemas de difusión evolutivos lineales. Veremos cómo algunos problemas de contorno se pueden considerar como los estados límite (estacionarios) de los procesos de difusión.

Hay muchas formas de abordar el análisis de ecuaciones de difusión y ninguna es netamente mejor que las demás. De cada punto de vista se extrae un tipo de información. Lo que vamos a hacer aquí es lo siguiente. Comenzaremos resolviendo la ecuación más básica (la ecuación del calor) por el método de separación de variables, aprovechando lo aprendido en la lección precedente sobre valores propios del laplaciano. Seguidamente estudiaremos el proceso de difusión que genera la separación de variables como una función (un operador) que al estado inicial le asocia el estado en un tiempo t y veremos cómo el proceso difusivo (al que llamaremos semigrupo) y el operador de difusión son esencialmente equivalentes: cada uno se deduce del otro. De allí pasaremos a abstraer algunas ideas básicas sobre la teoría de semigrupos asociados a problemas de difusión más generales.

1. La difusión en estado puro

Antes de nada, resulta útil ver un proceso difusivo en estado puro: con una única partícula. En este caso sólo hay ecuación de evolución y no vemos ni una ecuación espacial, ni condiciones de contorno. La ecuación de difusión es simplemente

$$\dot u = -\kappa\, u, \qquad u(0) = u_0,$$

donde $\kappa > 0$. Su solución es

$$u(t) = e^{-\kappa\, t} u_0.$$

El operador que al estado inicial asocia el estado en un tiempo t es

$$S(t)u_0 := e^{-\kappa\, t} u_0.$$

Por una propiedad muy conocida de la exponencial, es fácil deducir que

$$S(t)S(s) = S(t+s), \qquad \forall s, t \geq 0.$$

Esta es le propiedad de semigrupo que dice que hemos comenzado en $t = 0$ como podíamos haber comenzado en cualquier otro punto temporal. El resultado es simplemente una traslación temporal de todo lo que ocurre.

Fíjate además que

$$\frac{1}{t}\Big(S(t)u_0 - u_0\Big) \xrightarrow{t\to 0} -\kappa u_0.$$

El operador espacial (el lado derecho de la ecuación de evolución) se recupera a partir del semigrupo $S(t)$.

La misma idea se puede aplicar para algunos sistemas diferenciales. Supón que A es una matriz simétrica y definida negativa. Entonces la solución del sistema de ecuaciones ordinarias

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

es

$$\mathbf{u}(t) := \exp(tA)\,\mathbf{u}_0, \qquad t \geq 0,$$

donde la exponencial de una matriz se define con la fórmula del desarrollo en serie de la exponencial

$$\exp(t\,A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

Es fácil comprobar que la familia paramétrica (el parámetro es el tiempo) de operadores

$$S(t)\mathbf{u}_0 := \exp(t\,A)\mathbf{u}_0$$

cumple la propiedad de semigrupo. De hecho tenemos

$$S(0) = I, \qquad S(s+t) = S(s)S(t).$$

Tenemos otra propiedad más, que se llama la contractividad: en norma euclídea se tiene

$$\|S(t)\mathbf{u}_0\| \leq \|\mathbf{u}_0\|.$$

Aquí se emplea de forma clave que la matriz A tenga los valores propios negativos por ser definida negativa.

De nuevo, el operador espacial A se puede recuperar 'derivando'

$$\frac{1}{t}\Big(S(t)\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0\Big) \xrightarrow{t\to 0} A\mathbf{u}_0.$$

Si nos tomáramos la molestia de escribir todo lo anterior en términos de los valores y vectores propios de A encontraríamos algo muy parecido a lo que vamos a ver en la próxima sección, donde A será el laplaciano y las condiciones de contorno estarán ocultas en un sitio que habrá que dirimir con cuidado.

Si no llegaste a leer la sección 4 de la lección precedente, éste es el momento de hacerlo.

2. La ecuación del calor

La **ecuación del calor** es la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\partial_t u = \Delta u + f.$$

La incógnita u es una función de $d+1$ variables, d variables espaciales y otra más temporal. En principio, lo más natural es considerar que

$$u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R},$$

admitiendo el caso $T = \infty$, y tomando como Ω un dominio acotado del plano con frontera en las condiciones habituales para los problemas estacionarios. Entendemos que la ecuación se cumple en ese mismo dominio $\Omega \times (0, T)$. La función f puede depender tanto de las variables espaciales como de las temporales.

El laplaciano que aparece en la ecuación es únicamente respecto de las variables espaciales. Así pues la ecuación del calor es de orden dos en las variables espaciales y de orden uno en la variable restante (el tiempo). Para tener un problema bien planteado hace falta dar una condición inicial

$$u = (\,\cdot\,, t)\phi_0, \qquad \text{en } \Omega$$

y condiciones de contorno en la frontera Γ para todo tiempo $t \in (0, T)$. Para simplificar, vamos a plantearnos primero el caso de condiciones de Dirichlet no homogéneas en la frontera del dominio

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \qquad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \forall t \in (0, T).$$

Lo primero que vamos a hacer es 'resolver' el problema en el caso homogéneo (cuando tanto f como g son nulas) por el método de separación de variables. Hay que entender que la solución obtenida es una fórmula analítica dada por desarrollo en serie que requiere conocer mucha información del problema y calcular unas cuantas integrales. Desde el punto de vista práctico, salvo en casos muy elementales (cuando el dominio espacial es unidimensional), esta fórmula no es útil, pero sí aporta mucha información sobre cómo se comporta la solución y por qué ocurren determinados fenómenos de regularización, etc.

Primeras deducciones. Nos planteamos resolver

$$\left[\begin{array}{rl} \partial_t u = \Delta u, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ u(\,\cdot\,, 0) = \phi_0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma \times (0, \infty). \end{array}\right.$$

Nuestro punto de partida es el conjunto de valores propios y funciones propias Dirichlet del laplaciano en Ω. Tenemos por tanto numeradas y debidamente ortonormalizadas todas las soluciones de

$$\left[\begin{array}{rl} -\Delta u_n = \lambda_n u_n, & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{en } \Gamma, \end{array}\right. \qquad \int_\Omega u_n\, u_m = \delta_{nm}.$$

Si pusiéramos $\phi_0 = u_n$ como condición inicial, la ecuación se puede resolver fácilmente, ya que

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{-\lambda_n t} u_n(\mathbf{x})$$

cumple todas las condiciones. Esta solución es una función en variables separadas: es una función del espacio por otra del tiempo. Su regularidad en espacio es la misma que la de la función u_n y en tiempo es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$. No obstante, conviene fijarse en que

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) = -\lambda_n e^{-\lambda_n t} u_n(\mathbf{x}),$$

luego la derivada en el instante inicial es muy grande para valores λ_n grandes (recuerda que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$). Se puede intentar mirar este comportamiento de otra manera:

$$\int_\Omega |\partial_t u(\mathbf{x}, t)|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} = |\lambda_n e^{-\lambda_n t}|^2 \int_\Omega |u_n(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{t^2} |\lambda_n t e^{-\lambda_n t}|^2 \le \frac{C}{t^2}.$$

Esta cota, que diverge cuando $t \to 0$, es válida para todo n y va a ser la mejor que consigamos en el caso más general.

Solución por separación de variables. La idea general consiste en aprovechar que las funciones propias Dirichlet forman un sistema ortogonal completo de $L^2(\Omega)$ y descomponer la condición inicial

$$\phi_0 = \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_\Omega \phi_0 u_n \Big) u_n$$

para seguidamente superponer los comportamientos temporales de cada una de las u_n tomadas como condición inicial:

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t} \Big(\int_\Omega \phi_0 u_n \Big) u_n(\mathbf{x}).$$

Vamos a revisar algunos aspectos de esta fórmula antes de seguir adelante:

- En principio, sin aplicar ningún tipo de rigor podemos comprobar que esta función cumple la ecuación del calor y podemos asumir que cumplirá las condiciones de contorno puesto que cada una de las u_n las cumple.

- Este último detalle no es del todo cierto. ¿Por qué? Simple: ϕ_0 no tiene por qué cumplir las condiciones de contorno y en cambio se puede escribir como una serie en función de las funciones propias Dirichlet que sí las cumplen. Espera un par de puntos para ver más sobre esto.

- La serie que definía ϕ_0 convergía en $L^2(\Omega)$. La que define $u(\,\cdot\,, t)$ para $t > 0$ fijo lo hace con más razón, puesto que hemos multiplicado cada coeficiente por un número menor que la unidad. De hecho

$$\int_\Omega |u(\,\cdot\,, t)|^2 = \sum_{n=1}^\infty e^{-2\lambda_n t} \Big(\int_\Omega \phi_0 u_n \Big)^2 \le \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_\Omega \phi_0 u_n \Big)^2 = \int_\Omega |\phi_0|^2.$$

- Lo que ocurre realmente es que las exponenciales ayudan más de lo que parece a que la serie converja y esta lo hace mucho más fuertemente. Si tomamos $t > 0$ fijo podemos acotar
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left| e^{-\lambda_n t} \int_\Omega \phi_0 u_n \right|^2 \leq \frac{C}{t^2} \int_\Omega |\phi_0|^2.$$
Si regresas a la sección 4 de la lección anterior, verás que esto implica que la serie que define $u(\,\cdot\,, t)$ converge no sólo en $L^2(\Omega)$ sino también en $H^1(\Omega)$, esto es que llamando $\alpha_n = \int_\Omega \phi_0 u_n$
$$\Big\| u(\,\cdot\,, t) - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n \Big\|_{1,\Omega} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Como las combinaciones lineales de las funciones propias cumplen la condición de contorno
$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n \in H_0^1(\Omega),$$
la convergencia de la serie implica que $u(\,\cdot\,, t) \in H_0^1(\Omega)$ para todo $t > 0$, luego $u(\,\cdot\,, t)$ cumple la condición de contorno.

Hay muchas maneras más o menos intuitivas de introducir el método de separación de variables. Fíjate que aquí hemos dado directamente la fórmula de la solución partiendo de una descomposición de la condición inicial en serie de las funciones propias. Las exponenciales aparecían por arte de magia. De hecho, es fácil encontrarlas directamente. La solución en cada tiempo t se puede desarrollar en serie de funciones propias
$$u(\,\cdot\,, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) u_n, \qquad \alpha_n(t) = \int_\Omega u(\,\cdot\,, t) u_n.$$
Si se impone la condición inicial se tiene que
$$\alpha_n(0) = \int_\Omega \phi_0 u_n$$
y si se impone la ecuación diferencial y se igualan componente a componente las series se tiene
$$\alpha_n'(t) = -\lambda_n \alpha_n(t),$$
luego necesariamente
$$\alpha_n(t) = e^{-\lambda_n t} \int_\Omega \phi_0 u_n.$$

Condiciones iniciales regulares. Si partimos de una ϕ_0 que cumple
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big(\int_\Omega \phi_0 u_n \Big)^2 < \infty,$$

entonces tenemos que

$$\phi_0 \in H_0^1(\Omega).$$

Esto implica entre otras cosas que ϕ_0 cumple la condición de contorno. Así pues, $u(\,\cdot\,,t)$ no está obligada a un cambio tan brusco en la transición de $t = 0$ a $t > 0$. El cambio brusco ocurría por dos razones: (a) en $t = 0$ la función solo estaba en $L^2(\Omega)$, luego entre otras cosas podía tener discontinuidades, pero para $t > 0$ ya estaba en $H^1(\Omega)$ luego ya no podía tenerlas; (b) incluso si en $t = 0$ la función era muy regular, si no cumplía la condición de contorno, como u está obligada a cumplirla para todo $t > 0$, está obligada a realizar un cambio muy rápido en las cercanías de la frontera para tiempos pequeños.

En este caso de condiciones de contorno regulares podemos acotar

$$\int_\Omega |\partial_t u(\,\cdot\,,t)|^2 \le C \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \Big(\int_\Omega \phi_0 u_n \Big)^2 = C \int_\Omega |\nabla \phi_0|^2.$$

(La última igualdad se deduce de las operaciones que realizamos en la sección 4 de la lección pasada).

Límites estacionarios. Hay un caso algo más general que se puede resolver empleando estas ideas. Supongamos que el término fuente f y la condición de contorno g son independientes del tiempo. Si hubiera una solución estacionaria (independiente del tiempo), esta debería cumplir

$$\left[\begin{array}{rl} \Delta u_{\text{est}} + f = 0, & \text{en } \Omega, \\ u_{\text{est}} = g, & \text{en } \Gamma. \end{array}\right.$$

Este es un problema elíptico con solución única. La diferencia entre la solución de

$$\left[\begin{array}{rl} \partial_t u = \Delta u + f, & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ u(\,\cdot\,,0) = \phi_0, & \text{en } \Omega, \\ u = g, & \text{en } \Gamma \times (0,\infty) \end{array}\right.$$

y u_{est} cumple la ecuación homogénea. Así pues ese término transitorio se puede escribir como

$$u_{\text{tr}}(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t} \Big(\int_\Omega (\phi_0 - u_{\text{est}}) u_n \Big) u_n(\mathbf{x})$$

luego la solución completa es

$$u(\mathbf{x},t) = u_{\text{est}}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t} \Big(\int_\Omega (\phi_0 - u_{\text{est}}) u_n \Big) u_n(\mathbf{x}).$$

El término transitorio nunca llega a desaparecer del todo, pero converge exponencialmente rápido a cero.

3. El semigrupo de difusión

Vamos a reconsiderar el caso homogéneo enfatizando el proceso de evolución de una condición inicial al estado en tiempo t. Así escribiremos

$$L^2(\Omega) \ni \phi \longmapsto S(t)\phi := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\Big(\int_\Omega \phi\, u_n\Big) u_n$$

para el operador $S(t) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ que a ϕ la asocia la solución de

$$\left[\begin{array}{rl} \partial_t u = \Delta u, & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ u(\,\cdot\,,0) = \phi, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma \times (0,\infty), \end{array}\right.$$

evaluada en tiempo t. Este enfoque separa por completo las variables espacio y tiempo. Para cada tiempo tenemos una función de las variables espaciales $u(\,\cdot\,,t) = S(t)\phi \in L^2(\Omega)$.

Vamos a citar algunas propiedades interesantes:

(1) $S(0)\phi = \phi$, para todo ϕ, o escrito de otra manera

$$S(0) = I.$$

(2) Para todo $t, s > 0$

$$S(t+s) = S(t)S(s).$$

(3) Para todo ϕ

$$\lim_{t\to 0} S(t)\phi = \phi = S(0)\phi, \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$

(4) Para todo ϕ

$$\|S(t)\phi\|_{0,\Omega} \le \|\phi\|_{0,\Omega}.$$

Esta propiedad ya la hemos demostrado en la sección precedente.

Ejercicio. *Demuestra la propiedad (2). Para ello toma $\widetilde{\phi} = S(s)\phi$ como condición inicial, aplica $S(t)$ y compara con lo que se pide.*

Ejercicio. *Vamos a admitir el siguiente resultado técnico (que es una variante del llamado Teorema de la Convergencia Dominada), que permite pasar al límite dentro de series.*

Lema. *Supongamos que*

$$0 \le \beta_n(t) \le c_n, \qquad \forall t > 0, \quad \forall n \qquad \textit{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(0).$$

Demuestra que

$$\|S(t)\phi - \phi\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\lambda_n t} - 1)^2 \Big(\int_\Omega \phi u_n \Big)^2.$$

Aplicando el resultado anterior, demuestra que $S(t)\phi$ tiene a ϕ cuando $t \to 0$.

Aunque ya veremos la definición en la sección próxima, vamos a anticiparnos brevemente. Por cumplirse las propiedades (1), (2) y (3) se dice que $\{S(t)\}$ (que está definido para cada $t \geq 0$) es un C_0-semigrupo de operadores. La propiedad de semigrupo es (1)–(2). El C_0 que precede al término semigrupo hace referencia a la propiedad (3) que se puede leer como la continuidad en el cero de la aplicación $\phi \to S(t)\phi$. Por cumplirse la propiedad (4) se dice que $\{S(t)\}$ es un C_0-semigrupo contractivo.

Supongamos que la condición inicial cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \Big(\int_\Omega \phi\, u_n \Big)^2.$$

(Esto es incluso más exigente que la regularidad que supusimos en la sección anterior). Se puede ver que esto es equivalente a que exista el límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(S(t)\phi - \phi \Big), \qquad \text{en } L^2(\Omega).$$

En tal caso el límite es

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big(\int_\Omega \phi\, u_n \Big) u_n.$$

Mirando las cosas con mucho detenimiento se puede llegar a ver que: (a) el límite existe si y solo si

$$\phi \in H_0^1(\Omega), \qquad \Delta\phi \in L^2(\Omega)$$

(b) el límite es precisamente $\Delta\phi$. En el lenguaje más abstracto de la próxima lección diremos que el operador

$$A := \Delta,$$

definido en el conjunto

$$D(A) := \Big\{ \phi \in H_0^1(\Omega) \,\Big|\, \Delta\phi \in L^2(\Omega) \Big\} \subset L^2(\Omega),$$

es el generador infinitesimal del C_0-semigrupo $\{S(t)\}$. El conjunto $D(A)$ es el mismo que el conjunto de las soluciones de

$$\left[\begin{array}{rl} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{array} \right. \qquad \text{con } f \in L^2(\Omega).$$

Aunque las soluciones de este problema se buscan en $H_0^1(\Omega)$ el conjunto de las soluciones es más pequeño que el espacio $H_0^1(\Omega)$. Fíjate en que

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C\Big(\|u\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta u\|_{0,\Omega}^2 \Big)^{1/2}, \qquad \forall u \in D(A).$$

Ejercicio. *Demuestra que si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \Big(\int_\Omega \phi\, u_n \Big)^2,$$

entonces

$$\Delta\phi = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big(\int_\Omega \phi\, u_n \Big) u_n$$

y que

$$\Big\| \frac{1}{t}(S(t)\phi - \phi) - \Delta\phi \Big\|_{0,\Omega} \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ejercicio. *Con el operador A anterior, demuestra que*

$$\int_\Omega (Au)\, u \le 0, \qquad \forall u \in D(A).$$

Demuestra también que $I - A : D(A) \to L^2(\Omega)$ es suprayectivo, esto es, dada $f \in L^2(\Omega)$ existe $u \in D(A)$ tal que $u - Au = f$.

4. Problemas de Cauchy abstractos y semigrupos

Un C_0-**semigrupo de operadores** en un espacio de Hilbert H es una familia de operadores lineales y continuos

$$S(t) : H \to H, \qquad t \ge 0,$$

tales que:

(1) $S(0) = I$, esto es, $S(0)\phi = \phi$, para todo $\phi \in H$.

(2) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $s, t \ge 0$, esto es,

$$S(t+s)\phi = S(t)\Big(S(s)\phi\Big), \qquad \forall \phi \in H, \qquad \forall, s, t \ge 0.$$

(3) Para todo $\phi \in H$,

$$\lim_{t\to 0} S(t)\phi = \phi.$$

Se dice que el semigrupo es contractivo si además

$$\|S(t)\phi\| \le \|\phi\|, \qquad \forall \phi \in H, \qquad \forall t \ge 0.$$

Consideremos el conjunto de las ϕ tales que el límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(S(t)\phi - \phi\Big)$$

existe. En tal caso definimos

$$A\phi := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(S(t)\phi - \phi\Big).$$

El dominio de definición de este operador (esto es, los ϕ tales que este límite existe) se denota $D(A)$. Al operador A se le denomina **generador infinitesimal** del C_0-semigrupo $\{S(t)\}$. En el dominio $D(A)$ se puede definir la norma

$$\|\phi\|_{D(A)} := \left(\|\phi\|^2 + \|A\phi\|^2\right)^{1/2}.$$

El primer resultado abstracto que vamos a exponer (la demostración no es elemental) dice que el semigrupo da la evolución de una ecuación de difusión asociada al operador espacial A.

Teorema *Supongamos que tenemos un C_0-semigrupo $\{S(t)\}$ en el espacio de Hilbert H y que A es su generador infinitesimal. Sea $u_0 \in D(A)$ y definamos $u : [0,\infty) \to H$ mediante*

$$u(t) := S(t)u_0.$$

Entonces:

(a) *$u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$.*

(b) *u es la única solución del problema de valor inicial*

$$\left[\begin{array}{ll} u'(t) = Au(t), & \qquad t \geq 0, \\ & \\ u(0) = u_0. & \end{array}\right.$$

(c) *La función u es continua de $[0,\infty)$ en $D(A)$ y $\mathcal{C}^1$ de $[0,\infty)$ en H.*

La propiedad (c) es una propiedad de regularidad que dice dos cosas. Lo primero es que para todo $t_0 \geq 0$, la función $u'(t)$ es continua en t_0 en la norma de H, esto es,

$$\|u'(t) - u'(t_0)\| \stackrel{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$$

Lo segundo es que igualmente para todo $t_0 \geq 0$

$$\|u(t) - u(t_0)\|^2_{D(A)} = \|u(t) - u(t_0)\|^2 + \|Au(t) - Au(t_0)\|^2 \stackrel{t\to t_0}{\longrightarrow} 0.$$

Obviamente, como $u' = Au$, la segunda parte es redundante con la información que teníamos sobre la derivada.

El ejemplo ya estudiado. Ya hemos dado la expresión del semigrupo asociado a la difusión de calor con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas. El dominio del operador era

$$D(A) = \Big\{ u \in H_0^1(\Omega) \,\Big|\, \Delta u \in L^2(\Omega) \Big\},$$

y el operador es

$$Au := \Delta u.$$

En este caso tenemos

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C\|u\|_{D(A)}, \qquad \forall u \in D(A),$$

luego el resultado de continuidad en norma $D(A)$ nos da información sobre la norma $H^1(\Omega)$ de la solución. □

El segundo resultado identifica el semigrupo a partir del generador infinitesimal. Lo vamos a ver restringido al caso contractivo y explícitamente expresado en espacios de Hilbert (la definición del semigrupo y del generador infinitesimal no emplea el producto escalar, luego se puede extender a espacios más generales). El teorema que vamos a exponer se denomina Teorema de Lumer–Philips y es la especialización hilbertiana de un teorema más general llamado Teorema de Hille–Yosida. Todos estos teoremas buscan caracterizar los semigrupos a partir de sus generadores infinitesimales.

Nos hace falta una pequeña definición más. Sea $D(A) \subset H$ y $A : D(A) \to H$ un operador lineal. (En el operador A importa cuál es su dominio de definición). Decimos que A es **disipativo** si

$$(Au, u) \leq 0, \qquad \forall u \in D(A).$$

En esta expresión el paréntesis es el producto escalar de H, que por primera vez hace su aparición en esta sección. Decimos que A es **maximal disipativo** si es disipativo y además el operador $I - A : D(A) \to H$ es suprayectivo, esto es, para todo $f \in H$ existe $u \in D(A)$ tal que $u - Au = f$.

Lo de maximal disipativo hay que saber leerlo 'todo seguido'. No es que el operador A sea maximal y disipativo. Es maximal–disipativo. Quiere decir que no hay ningún operador disipativo con un dominio de definición más grande que el dado y que extienda a A. Por qué esto es así, no es obvio.

Teorema (Lumer–Philips) *$A : D(A) \subset H \to H$ es el generador infinitesimal de un C_0−semigrupo contractivo en el espacio de Hilbert H si y solo si es maximal disipativo.*

Hay un caso especial (en el que por otra parte encajan muchos procesos difusivos donde no hay término convectivo) en el que se pueden afirmar muchas más cosas. Es el caso de que A, además de ser maximal disipativo sea simétrico,

$$(Au, v) = (u, Av), \qquad \forall u, v, \in D(A).$$

Es precisamente el caso de

$$\Delta : \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\, \Delta u \in L^2(\Omega)\} \longrightarrow L^2(\Omega).$$

En este caso, el valor inicial se puede tomar en H y no hace falta que esté en $D(A)$. La solución del problema

$$\left[\begin{array}{ll} u'(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0, & \end{array}\right.$$

(fíjate que la ecuación ya no se cumple en $t = 0$ puesto que $u_0 \notin D(A)$) sigue siendo

$$u(t) = S(t)u_0,$$

pero ahora la regularidad se cumple solo en $(0, \infty)$. En concreto, $u : [0, \infty) \to H$ es continua, $u : (0, \infty) \to D(A)$ también lo es y por tanto también lo es $u' : (0, \infty) \to H$. Además se tienen las cotas

$$\|u(t)\| \le \|u_0\|, \qquad \|u'(t)\| \le \frac{1}{t}\|u_0\|, \qquad t > 0.$$

(La primera es obvia por la contractividad de $S(t)$).

5. Ejemplos

5.1. Problema de Neumann para la ecuación del calor

Nos planteamos ahora el problema

$$\left[\begin{array}{rl} \partial_\nu u = \Delta u, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_\nu u = 0, & \text{en } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(\,\cdot\,, 0) = \phi_0, & \text{en } \Omega. \end{array}\right.$$

Consideremos el dominio

$$D(A) := \Big\{ u \in H^1(\Omega) \,\Big|\, \Delta u \in L^2(\Omega), \quad \partial_\nu u = 0 \Big\}.$$

La última condición en la definición del operador hay que leerla en forma débil:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega (\Delta u)\, v = 0, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

El operador vuelve a ser $A := \Delta$. Es importante que notes que, como el dominio de definición es distinto, el operador es distinto al del problema con condiciones de Dirichlet.

Ejercicio. *Demuestra que A es maximal disipativo y simétrico en $L^2(\Omega)$. Extrae las consecuencias correspondientes para el problema de difusión.*

Ejercicio. *Considera las funciones propias Neumann del laplaciano (numeradas para $n \ge 0$)*

$$\left[\begin{array}{rl} -\Delta v_n = \mu_n v_n, & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu v_n = 0, & \text{en } \Gamma, \end{array}\right. \qquad \int_\Omega v_n v_m = \delta_{nm}.$$

Recuerda que el primer par es especial

$$\mu_0 = 0, \qquad v_0 \equiv \frac{1}{\mathrm{med}(\Omega)}.$$

Escribe el semigrupo correspondiente al problema de difusión empleando el desarrollo en serie que da el método de separación de variables. Demuestra que

$$u(\,\cdot\,,t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{med}(\Omega)} \int_\Omega \phi_0.$$

¿Puedes dar una 'interpretación física' de este límite?

5.2. Difusividad variable y término de reacción

Considera la siguiente versión modificada de la ecuación del calor

$$\partial_t u + r\,u = \nabla \cdot (\kappa \nabla u),$$

donde $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ cumple

$$0 < \kappa_0 \leq \kappa(\mathbf{x}) \leq \kappa_1, \qquad \text{(ctp)},$$

y $r(\mathbf{x}) \geq 0$.

Ejercicio. *Escribe el problema de valor inicial con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y reescribe el problema como un problema de Cauchy abstracto asociado a un determinado operador A maximal disipativo y simétrico.*

Lección 8

Ecuaciones de ondas

En las próximas dos lecciones vamos a echar un vistazo a procesos evolutivos donde el proceso directo y el inverso son 'difusivos'. (Esto es una forma de hablar: precisamente lo que no va a haber aquí es difusión). El hecho de que andar y desandar el camino dé difusión será indicio de que tenemos conservación. Así, desde el punto de vista de ecuaciones de orden uno, estaremos en un caso particular de los C_0-semigrupos contractivos que vimos en la lección anterior: serán los C_0-grupos de isometrías. En el fondo, nuestro interés en estas lecciones será por las ecuaciones de orden dos, pero en lugar de hacer una teoría nueva para ellas, intentaremos aplicar lo que sabemos (esencialmente el Teorema de Lumer–Philips y los conceptos sobre problemas de Cauchy y semigrupos), introduciendo como incógnita la velocidad, es decir, la derivada temporal de la incógnita. Este punto de vista no es una construcción teórica, sino que corresponde a cómo se abordan muchas ecuaciones de orden dos para estudiar bien sus propiedades y para proponer esquemas numéricos para su aproximación.

Una pequeña aclaración terminológica. Cuando uno habla de la *ecuación de ondas* se refiere a la ecuación de ondas acústicas lineales,

$$\partial_{tt} u = \Delta u + f,$$

(donde el laplaciano solo afecta a las variables espaciales). En el ámbito más abstracto, las ecuaciones de ondas tienen el aspecto

$$u''(t) = Au(t) + f,$$

donde A es un operador elíptico en las variables espaciales. Aquí se engloban también ecuaciones de ondas elásticas y más fenómenos oscilatorios. Es común a muchos fenómenos oscilatorios que hay un proceso de transporte, una transferencia de información de una zona del dominio a otra en tiempo finito. Esto no va a ser visible en la forma de abordar el problema que vamos a aplicar aquí. No obstante, para intentar completar la imagen, en su momento miraremos brevemente la fórmula de d'Alambert para ondas unidimensionales en espacio abierto.

1. El oscilador armónico

Al igual que hicimos con los procesos difusivos antes de estudiar el problema completo espacio–tiempo vamos a tomar el pulso a las ecuaciones de ondas estudiando el caso de una única partícula. La siguiente ecuación

$$\ddot{u} + c^2 u = 0$$

se llama el oscilador armónico. Por ahora no hay más variable que la temporal. Las soluciones de esta ecuación son

$$u(t) = \alpha \cos(c\,t) + \beta \operatorname{sen}(c\,t).$$

Tres detalles. La solución se puede escribir de esta otra forma

$$u(t) = A\,\cos(c\,(t - t_0)), \qquad A \geq 0, \qquad t_0 \in \mathbb{R},$$

de forma que se ve claramente la amplitud y la fase: el máximo del coseno se alcanza en t_0 y vale A. La fase se puede tomar en el primer período contando desde el cero $[0, (2\pi)/c)$ y de esta manera los pares de parámetros (A, t_0) identifican soluciones distintas cuando $A \neq 0$. Esta es la forma física de escribir las oscilaciones puras, pero es mucho más incómoda desde el punto de vista matemático, ya que la estructura lineal (las soluciones son combinaciones lineales de dos soluciones) se ha perdido. El segundo detalle es que cuando se hacen ondas, hay que acostumbrarse a poner el coseno primero y luego el seno (aunque cuando hablamos de seno y coseno siempre los decimos en este orden). Ahora veremos por qué. El tercer comentario concierne a c. Este parámetro se puede tomar con cualquier signo, ya que lo que aparece en la ecuación es c^2, así que se toma positivo y ya está. Es un parámetro de velocidad: está claro que si c crece las oscilaciones son mucho más rápidas. En la fórmula de d'Alambert veremos que además es propiamente una velocidad de transporte.

Los parámetros α y β en la fórmula de la solución general se pueden ajustar con las condiciones iniciales en $t = 0$,

$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = v_0.$$

Cuando se toma $t = 0$ se activa el coseno y desaparece el seno, mientras que si derivamos y luego tomamos $t = 0$ ocurre lo contrario. Esta es la razón principal de poner primero el coseno. La fórmula resultante para la solución es

$$u(t) = u_0\,\cos(c\,t) + (v_0/c)\,\operatorname{sen}(c\,t).$$

¿Hay algún concepto de propagación de las condiciones iniciales aquí? Sí lo hay, pero para observarlo hay que desmontar la ecuación de orden dos en un sistema de orden uno introduciendo

$$v = \dot{u}$$

como variable. Recuerda que esto se hace a menudo con las ecuaciones diferenciales de orden mayor que uno para aplicar fácilmente la gran batería de métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales de orden uno. El problema de valor inicial escrito es las variables (u, v) es

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Ya conocemos su solución

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cos(c\,t) + (v_0/c) \operatorname{sen}(c\,t), \\ v(t) &= \dot{u}(t) = -u_0\, c \operatorname{sen}(c\,t) + v_0 \cos(c\,t), \end{aligned}$$

que también se puede escribir

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(c\,t) & (1/c) \operatorname{sen}(c\,t) \\ -c \operatorname{sen}(c\,t) & \cos(c\,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Ahí está el semigrupo que propaga las condiciones iniciales, representado por la matriz

$$S(t) := \begin{bmatrix} \cos(c\,t) & (1/c) \operatorname{sen}(c\,t) \\ -c \operatorname{sen}(c\,t) & \cos(c\,t) \end{bmatrix}.$$

Ejercicio. *Comprueba que para todo $s, t \in \mathbb{R}$ (también para los negativos)*

$$S(t)\, S(s) = S(t+s).$$

Como consecuencia, observa que

$$S(-t)\, S(t) = S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

luego $S(-t)$ deshace el proceso de evolución realizado por $S(t)$.

Ejercicio. (Conservación de la energía) *Demuestra que*

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 + \frac{1}{2\,c^2}|v(t)|^2 = \frac{1}{2}|u_0|^2 + \frac{1}{2\,c^2}|v_0|^2, \qquad \forall t.$$

El primer sumando de esta expresión corresponde a la energía potencial y el segundo a la energía cinética. El resultado dice que la energía total (potencial más cinética) es constante en la evolución libre (sin término independiente) del oscilador armónico.

2. La ecuación de ondas

Vamos ahora a echar un primer vistazo a la ecuación de ondas (acústicas)

$$\partial_{tt} u = c^2 \Delta u + f,$$

donde $c > 0$ es una constante, el laplaciano se aplica en las variables espaciales y tanto u (la incógnita) como el término de fuerza f están definidos en $\Omega \times (0, T)$, siendo Ω un dominio de $\mathbb{R}^d$. Como en el caso de la ecuación del calor, vamos a tomar $f = 0$ y ver cómo evolucionan las dos condiciones iniciales (la ecuación es de orden dos en tiempo) cuando imponemos condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en todo momento. Así pues, nuestro problema es

$$\left[\begin{array}{rl} \partial_{tt} u = c^2 \Delta u, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ u(\,\cdot\,, 0) = u_0, & \text{en } \Omega, \\ u_t(\,\cdot\,, 0) = v_0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma \times (0, \infty), \end{array}\right.$$

siendo Γ, como de costumbre, la frontera de Ω. Vamos a intentar aplicar la teoría vista en la lección de procesos difusivos a esta nueva situación. Para ver qué ocurre con la separación de variables y los valores propios, ve directamente a la Sección 4. Por ahora, centrémonos en buscar nuestro operador maximal disipativo y el semigrupo que genera. La idea es la misma que con el oscilador armónico. Si introducimos $v = u_t$ como incógnita tenemos un sistema de orden uno

$$\partial_t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ c^2 \Delta u \end{bmatrix},$$

con sus correspondientes condiciones iniciales. Fíjate que puesto que $u = 0$ en la frontera en todo momento, también ocurre que $v = 0$ en $\Gamma \times (0, \infty)$. Esto va a influir en la definición del dominio del operador A.

El espacio y la energía. Nuestro espacio de funciones (en las variables espaciales) debe contener tanto a u como a v. Tomaremos

$$H := H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

con el siguiente producto escalar

$$\Big((u, v), (\widehat{u}, \widehat{v})\Big)_H := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \widehat{u} + \frac{1}{c^2} \int_\Omega v\, \widehat{v}, \qquad (u, v), (\widehat{u}, \widehat{v}) \in H.$$

Fíjate que en la parte $H^1_0(\Omega)$ (la que afecta a las us) no hemos tomado toda la norma $H^1(\Omega)$, sino sólo la parte de los gradientes, que define una norma equivalente gracias a la desigualdad de Poincaré. En la parte $L^2(\Omega)$ (la que afecta a las vs) hemos incluido el factor $1/c^2$. La norma es equivalente si quitamos este factor, pero para las propiedades de disipatividad y conservación de energía es clave tomar el producto escalar correcto. La idea es que en H hay un concepto de energía,

$$\frac{1}{2} \|(u, v)\|_H^2 = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\, c^2} \int_\Omega |v|^2,$$

que será conservado durante el proceso evolutivo.

El operador. El dominio del operador es

$$D(A) := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \,\middle|\, \Delta u \in L^2(\Omega) \right\} \times H_0^1(\Omega) \subset H$$

y el operador en sí es

$$A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ c^2 \, \Delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ c^2 \, \Delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Fíjate que las condiciones impuestas al dominio $D(A)$ aseguran que el operador está bien definido. En particular la primera componente de $A(u, v)$ obliga a que v esté en $H_0^1(\Omega)$. ¿Ves por qué?

Vamos a demostrar la disipatividad de A. Tomamos $(u, v) \in D(A)$ y desarrollamos empleando la fórmula de Green

$$\begin{aligned} \Big(A(u,v),\, (u,v) \Big)_H &= \Big((v, c^2 \, \Delta u),\, (u,v) \Big)_H \\ &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + \frac{1}{c^2} \int_\Omega (c^2 \, \Delta u) \, v \\ &= \int_\Gamma (\partial_\nu u) \, v = 0, \end{aligned}$$

ya que $v \in H_0^1(\Omega)$ y por tanto $v = 0$ en Γ. Ahora bien, ya no es que esta cantidad sea menor o igual que cero (esa es la disipatividad), sino que es cero. Por tanto, $-A$ también es disipativo.

Ejercicio. *Comprueba que A no es simétrico.*

Si queremos demostrar que A es maximal disipativo, tenemos que partir de $(f, g) \in H$ (por tanto, $f \in H_0^1(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$) y encontrar $(u, v) \in D(A)$ de forma que

$$(u, v) - A(u, v) = (f, g),$$

es decir

$$\left[\begin{array}{ll} u \in H_0^1(\Omega), & \Delta u \in L^2(\Omega), \\ v \in H_0^1(\Omega), & \\ u - v = f, & \\ v - c^2 \Delta u = g. & \end{array} \right.$$

Esto puede parecer muy intrincado, pero se trata simplemente de sumar las ecuaciones. Primero resolvemos el problema de contorno elíptico

$$\left[\begin{array}{rl} -c^2 \, \Delta u + u = f + g, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{array} \right.$$

y luego definimos

$$v = u - f.$$

Es bastante fácil comprobar que u y v cumplen todos los requisitos. Una vez tenemos que A es maximal disipativo ya sabemos que A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo contractivo y podemos ponernos a pensar en términos de los problemas de evolución.

La novedad en este caso es que $-A$ también es maximal disipativo. En lugar de explorar las consecuencias de este fenómeno con el ejemplo que estamos desarrollando, vamos a mirar las cosas un poco más de lejos.

Ejercicio. *Demuestra que $-A$ es maximal disipativo.*

3. C_0-grupos y evolución conservativa

Para no confundir los elementos del espacio H concreto del ejemplo anterior, que son pares de funciones, con las notaciones de la lección anterior, vamos a escribir $\mathbf{u} \in H$ para un elemento general del espacio de Hilbert H. En el caso de la ecuación de ondas $\mathbf{u} = (u, v)$. Esto no quiere decir que lo que vamos a contar aquí esté pensado para magnitudes vectoriales, sino que no queremos confundir notaciones con el ejemplo que hemos venido desarrollando.

El punto de partida es un operador lineal $A : D(A) \subset H \to H$ de manera que A y $-A$ son maximal disipativos. Que $\pm A$ sean disipativos es lo mismo que decir

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0, \qquad \forall \mathbf{u} \in D(A)$$

(¿por qué?). Además $I \pm A : D(A) \to H$ deben ser suprayectivos para que $\pm A$ sean maximal disipativos. Llamamos $S^+(t)$ al semigrupo generado por A y $S^-(t)$ al generado por $-A$. Seguidamente damos la vuelta al tiempo en S^- lo pegamos por delante de S^+, esto es, construimos

$$S(t) = \begin{cases} S^+(t), & \text{si } t \geq 0, \\ S^-(-t), & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

No hay problema con la definición en cero ya que $S^+(0) = I = S^-(0)$.

1. Vamos a comenzar intentando ver qué sentido tiene la rama negativa de $S(t)$. El semigrupo $S^-(t)$ sirve para resolver una ecuación de evolución asociada a $-A$: si $\mathbf{u}_0 \in D(A)$, entonces

$$\mathbf{u}(t) = S(t)\mathbf{u}_0$$

es la solución única de

$$\left[\begin{array}{ll} \mathbf{u}'(t) = -A\mathbf{u}(t), & \qquad t > 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. & \end{array}\right.$$

Ahora le damos la vuelta al tiempo: para $t < 0$ definimos

$$\mathbf{w}(t) := \mathbf{u}(-t) = S^-(-t)\mathbf{u}_0 = S(t)\mathbf{u}_0,$$

y resulta que tenemos la única solución del problema retrógrado

$$\left[\begin{array}{ll} \mathbf{w}'(t) = A\mathbf{w}(t), & t < 0, \\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{u}_0. \end{array}\right.$$

(¿Por qué es única? Porque basta darle la vuelta al tiempo de nuevo para tener una ecuación de evolución de la que sí sabemos que tiene solución única). Así pues, $S(t)$ con t negativo propaga las condiciones iniciales hacia atrás en el tiempo.

2. Es posible demostrar que se mantiene la propiedad de semigrupo también para los t negativos:

$$S(t)S(s) = S(t+s), \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

En particular

$$S(t)S(-t) = S(-t)S(t) = I,$$

luego todos los operadores $S(t)$ son inversibles. Esta última propiedad es muy fácil de interpretar. Pongamos $S(-T)S(T)\mathbf{u}_0$ con $T > 0$. El operador $S(T)$ avanza el problema de valor inicial hasta el tiempo T. En principio, $S(-T)$ mueve la condición del tiempo $t = 0$ a $t = -T$, pero el origen de tiempos es arbitrario (esa es la propiedad de semigrupo) y por tanto, podemos pensar que mueve la condición de $t = T$ a $t = 0$. Si aplicamos primero $S(T)$ y luego $S(-T)$ vamos y volvemos del cero al cero pasando por T, luego por unicidad de solución retomamos la condición inicial, es decir,

$$S(-T)S(T)\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0.$$

En términos más abstractos se dice que $\{S(t)\}$ es un C_0-grupo de operadores.

3. Partimos de nuevo de $\mathbf{u}_0 \in D(A)$ y definimos $\mathbf{u}(t) = S(t)\mathbf{u}_0$. Sabemos que

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Así

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|^2\Big) = (\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t)) = (A\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) = 0, \qquad \forall t,$$

puesto que $\pm A$ son disipativos. Por tanto $\|\mathbf{u}(t)\|$ es constante y entonces

$$\|S(t)\mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{u}(t)\| = \|\mathbf{u}(0)\| = \|\mathbf{u}_0\|, \qquad \forall t.$$

Esta propiedad es cierta también para cualquier $\mathbf{u}_0$ (aunque no esté en el dominio de A) de modo que

$$\|S(t)\mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{u}_0\|, \qquad \forall \mathbf{u}_0 \in H, \qquad \forall t.$$

Así, *los operadores $S(t)$ son isometrías*. Pegado a lo anterior, se dice que $\{S(t)\}$ es un C_0-grupo de isometrías.

De vuelta al ejemplo. Si nos planteamos el problema de valor inicial y contorno asociado a la ecuación de ondas como el problema de Cauchy

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{array}\right.$$

tenemos solución única para

$$\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0) \in D(A)$$

y esta solución viene dada por el grupo $S(t)$. Así podemos escribir

$$(u(t), v(t)) = \mathbf{u}(t) = S(t)\mathbf{u}_0$$

y sabemos que tenemos conservación de energía, que podemos escribir como

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2_{1,\Omega} + \frac{1}{2\,c^2}\|v(t)\|^2_{0,\Omega} = \frac{1}{2}|u_0|^2_{1,\Omega} + \frac{1}{2\,c^2}\|v_0\|^2_{0,\Omega}, \qquad \forall t$$

o, escribiendo las funciones con las variables espacio y tiempo más visibles

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |(\nabla u)(\,\cdot\,,t)|^2 + \frac{1}{2\,c^2}\int_\Omega |\partial_t u(\,\cdot\,,t)|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 + \frac{1}{2\,c^2}\int_\Omega |v_0|^2, \qquad \forall t.$$

La solución $\mathbf{u}(t)$ es continua de $[0,\infty)$ en $D(A)$ y $\mathcal{C}^1$ de $[0,\infty)$ en H. Traducimos la segunda propiedad a nuestro ejemplo: $u(t)$ y $u'(t)$ son continuas de $[0,\infty)$ en $H^1(\Omega)$, mientras que $v(t)$ y $v'(t)$ los son de $[0,\infty)$ en $L^2(\Omega)$. Puesto que $v' = u$, tenemos que $u''(t)$ es continua de $[0,\infty)$ en $L^2(\Omega)$. La propiedad restante no dice nada nuevo.

El hecho de que A no sea simétrico implica que nuestra teoría nos autoriza a tomar condiciones iniciales en $D(A)$ pero no en todo H. La ecuación carece del efecto regularizante que tienen las ecuaciones de difusión.

4. Qué dice la separación de variables sobre esto

Es interesante recuperar la idea de separación de variables para observar el comportamiento de la evolución que proporciona la ecuación de ondas. Una vez más hay que insistir en que la separación de variables es principalmente una forma de representar las soluciones de manera que se pueden estudiar sus propiedades pero que en muy pocas situaciones es de interés emplear esta fórmula en la práctica, principalmente por la dificultad de tener los valores propios del laplaciano.

Comenzamos de nuevo con los valores propios y funciones propias Dirichlet del laplaciano:

$$\left[\begin{array}{rl} -\Delta\phi_n = \xi_n^2\phi_n, & \text{en } \Omega, \\ \phi_n = 0, & \text{en } \Gamma, \end{array}\right. \qquad \int_\Omega \phi_n\,\phi_m = \delta_{nm}.$$

La única novedad es que aprovechando que los valores propios son positivos los hemos escrito en la forma ξ_n^2 con ξ_n otra vez. También hemos cambiado el nombre a las funciones propias para que no se confundan con las condiciones iniciales, a las que seguiremos llamando con el mismo nombre.

La solución de nuestro problema

$$\left[\begin{array}{rl} \partial_{tt} u = c^2 \Delta u, & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ u(\,\cdot\,,0) = u_0, & \text{en } \Omega, \\ u_t(\,\cdot\,,0) = v_0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma \times (0,\infty), \end{array}\right.$$

se podrá escribir en la forma

$$u(\,\cdot\,,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \phi_n, \qquad \alpha_n(t) = \int_\Omega u(\,\cdot\,,t)\,\phi_n.$$

La primera de las condiciones iniciales nos dice que como $u(\,\cdot\,,t) = u_0$, entonces

$$\alpha_n(0) = \int_\Omega \phi_n\, u_0 =: a_n.$$

Derivando (al menos suponiendo que podemos hacerlo), tenemos que

$$\partial_t u(\,\cdot\,,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n'(0) \phi_n = v_0,$$

luego

$$\alpha_n'(0) = \int_\Omega \phi_n\, v_0 =: b_n.$$

Finalmente, puesto que

$$\partial_{tt} u = c^2 \Delta u,$$

entonces debe cumplir

$$\alpha_n''(t) + (c\,\xi_n)^2 \alpha_n(t) = 0.$$

(Espero que nadie esté sorprendido de encontrarse aquí un oscilador armónico.) La solución de este problema de valor inicial es

$$\alpha_n(t) = a_n\, \cos(c\,\xi_n\, t) + \frac{b_n}{c\,\xi_n}\, \operatorname{sen}(c\,\xi_n\, t)$$

lo que sustituido en la fórmula para u nos da

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n\, \cos(c\,\xi_n\, t) + \frac{b_n}{c\,\xi_n}\, \operatorname{sen}(c\,\xi_n\, t) \Big) \phi_n(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(c\,\xi_n\,(t - t_n))\, \phi_n(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

En total tenemos un superposición de oscilaciones a frecuencias crecientes (ξ_n tiende a infinito con n) y cada una con su fase.

Sin entrar en mucho detalle notarás que los coeficientes b_n (que proceden de la condición inicial para la velocidad) están divididos por las frecuencias ξ_n (los **modos de vibración**). Eso hace que los coeficientes b_n puedan corresponder a una función menos regular en espacio que los a_n, que no están ayudados por ξ_n para tender a cero. A su vez, esto refleja algo que ya teníamos en el otro enfoque: se pide menos regularidad espacial a la condición inicial para la velocidad que a la de la posición.

Es posible revisar todas las operaciones con sumo cuidado y observar que si $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tiene su laplaciano en $L^2(\Omega)$ y si $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, las series convergen suficientemente bien para cada t como para poder asegurar que la condición de contorno se está cumpliendo.

¿Dónde está aquí el grupo? No es fácil de encontrar a simple vista. Hay que recordar que el grupo asocia a cada par (u_0, v_0) el valor del par $(u(t), u'(t))$, luego se puede comprobar que el grupo viene representado por una serie

$$S(t)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \begin{bmatrix} \cos(c\,\xi_n\, t) & \operatorname{sen}(c\,\xi_n\, t)/(c\,\xi_n) \\ -c\,\xi_n \operatorname{sen}(c\,\xi_n\, t) & \cos(c\,\xi_n\, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_\Omega \phi_n\, u_0 \\ \int_\Omega \phi_n v_0 \end{bmatrix}.$$

La conservación de energía se puede demostrar partiendo de esta fórmula de una manera más o menos laboriosa. En todo caso, lo dejamos aquí.

5. Ondas elásticas

Las cuestiones básicas sobre ondas elásticas son sorprendentemente similares a las de las ondas acústicas. De hecho las ondas elásticas tienen otras complicaciones, algunas de las cuales intentaremos ver en la próxima lección. Para leer esta lección repasa brevemente las notaciones de la Lección 4 y así no las repetimos. La evolución libre de un sólido lineal elástico (o una membrana en el caso bidimensional), fijado su desplazamiento a cero en los extremos, cumple el siguiente modelo

$$\left[\begin{array}{rl} \partial_{tt}\mathbf{u} = \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}), & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ \mathbf{u}(\,\cdot\,,0) = \mathbf{u}_0, & \text{en } \Omega, \\ \partial_t\mathbf{u}(\,\cdot\,,0) = \mathbf{v}_0, & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{en } \Gamma \times (0,\infty). \end{array}\right.$$

El operador elástico (la divergencia del tensor de tensiones) está aplicado, claro está, en las variables espaciales. Para todo lo que sigue da igual si la ley constitutiva es la ley de Hooke o algo más complicado. Mientras que esta ley de estado sea lineal, que el sólido sea heterogéneo o anisótropo es completamente invisible en la formulación.

Nota, eso sí, que para terminar de complicar la notación, ahora $\mathbf{u}$ es el campo básico de desplazamientos y que las variables para transformar este problema en un problema de orden uno son $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, donde $\mathbf{v} = \partial_t\mathbf{u}$.

El espacio es

$$H := \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega),$$

con el producto escalar

$$\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\widehat{\mathbf{u}}) + \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\widehat{\mathbf{v}},$$

de manera que la energía que se va a conservar es la energía elástica más la energía cinética

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{v}|^2.$$

El operador espacial está definido en el dominio

$$\Big\{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \,\Big|\, \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)\Big\} \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

y es, obviamente,

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u})).$$

Ejercicio. *Completa los detalles de este ejemplo. Si se tienen los valores propios y funciones propias del operador de la elasticidad, debidamente normalizados*

$$\left[\begin{array}{r} \operatorname{div}\sigma(\boldsymbol{\phi}_n) + \xi_n^2\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}, \quad \textit{en } \Omega, \\ \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}, \quad \textit{en } \Gamma, \end{array}\right.$$

¿cuál es la expresión de la solución del problema como una serie de funciones?

Bibliografía

Índice general