

Introducción a los métodos de descomposición de dominio

Salim Meddahi

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Francisco Javier Sayas

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Junio de 1995

Introducción

Las siguientes notas han surgido a partir del contenido de un ciclo de cinco conferencias que Salim Meddahi impartió en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, dentro de las actividades del Seminario de Matemática Aplicada, en junio de 1995. La posterior redacción de las notas fue realizada por Javier Sayas.

En este curso introducimos algunos métodos de descomposición de dominio aplicados a la resolución de problemas elípticos de segundo orden en dimensión dos. Recientemente las técnicas de descomposición de dominio han sido considerablemente desarrolladas (ver las monografías [7, 13] y las referencias allí incluidas). Estos métodos constituyen una manera natural de tratar problemas en geometrías complicadas, o bien de estudiar ecuaciones de diferente tipo en diferentes partes del dominio físico. Otra motivación importante para el estudio de dichos métodos es su adaptación al cálculo en paralelo.

En general los métodos de descomposición de dominio consisten en sustituir la resolución de un sistema matricial muy grande por un proceso iterativo que precisa la resolución (a veces en paralelo) de varios sistemas de talla reducida en cada iteración. El punto crucial en los diferentes métodos de descomposición de dominio es la transmisión de la información entre los subdominios. Existen dos categorías de métodos de descomposición de dominio. La primera se basa en una partición del dominio en regiones disjuntas: la relación entre las soluciones en los subdominios se expresa mediante condiciones de continuidad en las intercaras. La segunda categoría se basa en una descomposición con recubrimiento. El ejemplo más conocido en esta categoría es el método de Schwarz en el que se resuelven problemas similares en cada subdominio intercambiando las trazas sobre las intercaras.

El curso se divide en cinco partes. En el primer capítulo introducimos en un caso simple los métodos de Schwarz multiplicativo y aditivo. En el capítulo 2 damos en un marco abstracto general la teoría de convergencia de ambos métodos que servirá de soporte para el estudio de las tres aplicaciones que presentamos en los tres siguientes capítulos. La primera es un método de descomposición de dominio con recubrimiento. Seguidamente estudiamos un método multinivel y finalmente presentamos un método de Schwarz equivalente a un método de descomposición de dominio sin recubrimiento.

Para leer esta monografía bastan conocimientos elementales de las técnicas de Análisis Funcional (teoría básica de espacios de Hilbert, de distribuciones y de los espacios de Sobolev más habituales), de su aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales lineales elípticas de segundo orden y del análisis del método de los Elementos Finitos.

1. Descripción de los métodos de Schwarz

Consideremos dos dominios Ω_1 y Ω_2 acotados, con geometrías simples y una zona de solapamiento en el plano \mathbb{R}^2 . Sea $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$. Nos planteamos el problema de contorno en EDP

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

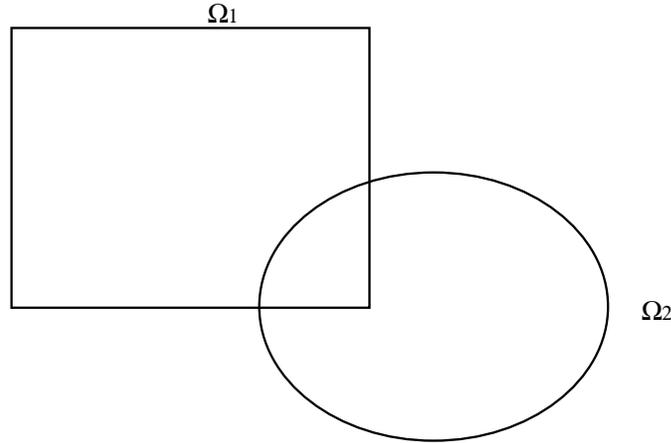


Figura 1: Un dominio formado por unión de dos dominios con geometrías sencillas

1.1. Método de Schwarz multiplicativo

El método de Schwarz es un esquema iterativo para aproximar la solución del problema anterior mediante la resolución de problemas en los dominios Ω_1 y Ω_2 (ver Schwarz[19]).

Dado u^n , aproximación de u , se resuelve

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f, & \text{en } \Omega_1, \\ u_1^{n+1}|_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega} = 0, \\ u_1^{n+1}|_{\partial\Omega_1 \cap \Omega_2} = u^n|_{\partial\Omega_1 \cap \Omega_2}; \end{cases}$$

y seguidamente

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f, & \text{en } \Omega_2, \\ u_2^{n+1}|_{\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega} = 0, \\ u_2^{n+1}|_{\partial\Omega_2 \cap \Omega_1} = u_1^{n+1}|_{\partial\Omega_2 \cap \Omega_1}. \end{cases}$$

La función u^{n+1} igual a u_2^{n+1} sobre Ω_2 y a u_1^{n+1} sobre $\Omega \setminus \Omega_2$ se toma como siguiente aproximación de u , reiniciándose el proceso.

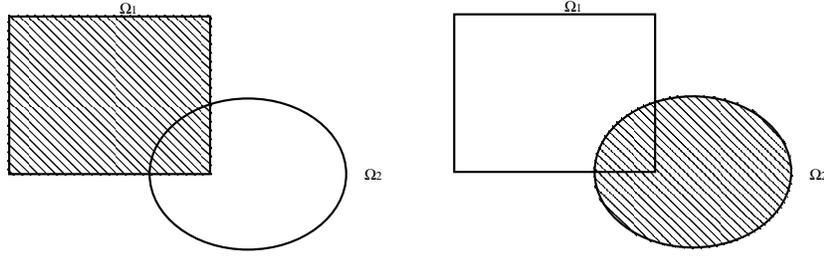


Figura 2: El método de Schwarz: se resuelve primero en el dominio Ω_1 ; la restricción del resultado a la zona de $\partial\Omega_2$ contenida en Ω_1 se utiliza como dato de contorno para resolver en Ω_2

La formulación variacional del problema (P) es, como siempre,

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

donde

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x},$$

y

$$f(v) := \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Para escribir la formulación variacional del método de descomposición de dominio consideramos $H_0^1(\Omega_i)$ (con $i = 1$ ó 2) con la siguiente definición

$$H_0^1(\Omega_i) := \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_{\Omega \setminus \Omega_i} \equiv 0\},$$

es decir, las funciones de $H_0^1(\Omega_i)$ se consideran extendidas por cero al resto del dominio Ω (nótese que se mantienen así dentro de $H^1(\Omega)$), por lo cual $H_0^1(\Omega_i)$ puede ser considerado un subespacio de $H_0^1(\Omega)$ para $i = 1, 2$.

Con las mismas definiciones para $a(\cdot, \cdot)$ y $f(\cdot)$ consideramos los siguientes problemas: partiendo de $u^n \in H_0^1(\Omega)$, se resuelve

$$(P_1^{n+1}) \begin{cases} z_1 \in H_0^1(\Omega_1), \\ a(z_1, v_1) = f(v_1) - a(u^n, v_1), \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1), \end{cases}$$

se realiza una primera corrección

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + z_1 \in H_0^1(\Omega),$$

se resuelve después

$$(P_2^{n+1}) \begin{cases} z_2 \in H_0^1(\Omega_2), \\ a(z_2, v_2) = f(v_2) - a(u^{n+\frac{1}{2}}, v_2), \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2), \end{cases}$$

y se vuelve a corregir

$$u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} + z_2 \in H_0^1(\Omega).$$

El término independiente del primer problema variacional es el cálculo de una a -proyección de la parte del residuo de la iteración anterior que afecta al primer subdominio, es decir, se considera

$$f(\cdot) - a(u^n, \cdot) \in (H_0^1(\Omega_1))'$$

y se calcula z_1 , el representante por el teorema de Riesz-Fréchet en el citado espacio con a como producto escalar. La corrección $u^{n+\frac{1}{2}}$ da lugar a un nuevo residuo –en el segundo subdominio– y se realiza una nueva aplicación del teorema de representación del dual para volver a corregir.

1.2. Formulación operacional del método de Schwarz multiplicativo

Notemos que $H_0^1(\Omega_i)$, entendidos como subespacios de $H_0^1(\Omega)$, son cerrados, ya que, de hecho, son las clausuras respectivas de $\mathcal{D}(\Omega_i)$.

Por tanto, dado $v \in H_0^1(\Omega)$ podemos definir su a -proyección ortogonal sobre $H_0^1(\Omega_i)$, denotada $P_i v$, como el único elemento de $H_0^1(\Omega_i)$ que cumple

$$a(P_i v, w_i) = a(v, w_i), \quad \forall w_i \in H_0^1(\Omega_i).$$

Sin más que notar que

$$a(u, v_i) = f(v_i), \quad \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \subset H_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

donde u es la solución de la formulación variacional asociada a (P) , el algoritmo de Schwarz multiplicativo se puede reescribir de la siguiente forma: partiendo de $u^n \in H_0^1(\Omega)$, se resuelve

$$\begin{cases} z_1 \in H_0^1(\Omega_1), \\ a(z_1, v_1) = a(u - u^n, v_1), \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1), \end{cases}$$

se corrige

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + z_1 \in H_0^1(\Omega),$$

se resuelve en el segundo subdominio

$$\begin{cases} z_2 \in H_0^1(\Omega_2), \\ a(z_2, v_2) = a(u - u^{n+\frac{1}{2}}, v_2), \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2), \end{cases}$$

y se corrige de nuevo

$$u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} + z_2.$$

Por tanto, aplicando la definición de P_1 ,

$$z_1 = P_1(u - u^n),$$

luego

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + P_1(u - u^n).$$

De la misma forma

$$u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} + z_2 = u^{n+\frac{1}{2}} + P_2(u - u^{n+\frac{1}{2}})$$

y componiendo

$$u - u^{n+1} = (I - P_2)(I - P_1)(u - u^n),$$

siendo I el operador identidad en $H_0^1(\Omega)$. El operador

$$(I - P_2)(I - P_1)$$

es llamado operador de amplificación del método. Sea $\| \cdot \|$ la norma de operadores en $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$. Entonces se demuestra –ver Lions [14]– el siguiente resultado:

Teorema. *Existe $\delta < 1$ tal que*

$$\|(I - P_2)(I - P_1)\| < \delta.$$

Por tanto, el método de Schwarz multiplicativo converge.

1.3. Método de Schwarz aditivo

El método aditivo se obtiene modificando el método multiplicativo de forma que los cálculos para cada paso en cada subdominio se hagan de forma paralela, sin que la información del primero intervenga en la del segundo.

Visto como problemas de contorno, conocido u^n , aproximación de u , se resuelven

$$\begin{cases} -\Delta u_i^{n+1} = f, & \text{en } \Omega_i, \\ u_i^{n+1}|_{\partial\Omega_i} = u^n|_{\partial\Omega_i}, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Como u^{n+1} se toma la función que en $\Omega \setminus \Omega_2$ coincide con u_1^{n+1} , que en $\Omega \setminus \Omega_1$ coincide con u_2^{n+1} , y en la intersección de los subdominios se toma $u_1^{n+1} + u_2^{n+1} - u^n$.

Pasando a la formulación variacional (ya abreviada por medio de los operadores de proyección P_i), se tiene: dado $u^n \in H_0^1(\Omega)$ se calculan

$$z_i = P_i(u - u^n) \in H_0^1(\Omega_i), \quad i = 1, 2$$

y se corrige

$$u^{n+1} = u^n + z_1 + z_2.$$

Nótese que, aunque u –la solución exacta– aparece en el proceso, es bajo una a –proyección, luego lo que aparece realmente es f .

La expresión de la evolución del error del método es

$$u - u^{n+1} = (I - P_1 - P_2)(u - u^n),$$

luego el operador de amplificación del método aditivo es

$$I - P_1 - P_2.$$

1.4. Métodos discretos de descomposición de dominio

El tratamiento numérico del problema variacional

$$(P) \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

y de problemas en los subdominios del tipo

$$(P_i) \begin{cases} z_i \in H_0^1(\Omega_i), \\ a(z_i, v_i) = g(v_i), \quad \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i), \end{cases}$$

se puede realizar por medio del método de los elementos finitos.

Supongamos que Ω, Ω_1 y Ω_2 son poligonales. Sea \mathcal{T}_h una triangulación regular de Ω que respete la descomposición de Ω en los subdominios, es decir, tal que la clausura de cada Ω_i sea unión de elementos de la triangulación.

Definimos los espacios de elementos finitos

$$V_h := \{v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_{h,i} := V_h \cap H_0^1(\Omega_i), \quad i = 1, 2.$$

Dada la base habitual de V_h , $\{\varphi_i\}$, de funciones con soporte mínimo, que valgan uno en el nodo i -ésimo y cero en los demás, consideramos la *matriz de rigidez* A ,

$$A_{i,j} := a(\varphi_j, \varphi_i)$$

y el vector F

$$F_i := f(\varphi_i).$$

El método de los elementos finitos para el problema en el dominio completo se reduce a resolver el sistema

$$AU = F.$$

En cada Ω_i realizamos una numeración local de los nodos, definimos de forma similar una base y las matrices de rigidez A_1 y A_2 . Las numeraciones locales de nodos en Ω_i pueden ser puestas en relación con la numeración global en Ω mediante las matrices R_i^t definidas como

$$(R_i^t)_{l,k} := \begin{cases} 1, & \text{si } l \text{ es el núm. global del nodo } k \text{ en } \Omega_i, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para $i = 1, 2$.

Por tanto si N es el número total de grados de libertad del problema ($N = \dim V_h$) y N_i son los grados de libertad en cada subdominio, es decir, $N_i = \dim V_{h,i}$, las matrices R_i^t son matrices $N \times N_i$. Multiplicadas a un vector con N_i componentes, dan otro de N componentes con los mismos valores nodales en los nodos de Ω_i ordenados según la

numeración global y con ceros en las demás componentes. Por tanto, una función del espacio de elementos finitos $V_{h,i}$ es extendida por cero al resto del dominio Ω .

El operador lineal asociado a la matriz traspuesta R_i es un operador de restricción, que renumera la información de los nodos de Ω que están en Ω_i para adaptarla a la numeración local, e ignora los valores de los grados de libertad que no pertenecen al interior del subdominio.

Nota *Es sencillo comprobar que en las notaciones anteriores,*

$$A_i = R_i A R_i^T, \quad i = 1, 2.$$

Resolver por elementos finitos un problema del tipo (P_i) se reduce a resolver sistemas lineales

$$A_i U_i = G_i.$$

Seguidamente daremos las versiones discretas de los dos algoritmos de Schwarz expuestos anteriormente. Estos algoritmos surgen de resolver con elementos finitos cada uno de los subproblemas asociados.

1.4.1. Método de Schwarz multiplicativo

Conocido U^n , se calcula

$$z_1 = A_1^{-1} R_1 (F - A U^n),$$

se corrige (nótese que hay que extender hasta V_h)

$$U^{n+\frac{1}{2}} = U^n + R_1^t z_1 = U^n + R_1^t A_1^{-1} R_1 (F - A U^n),$$

se calcula en el segundo subdominio

$$z_2 = A_2^{-1} R_2 (F - A U^{n+\frac{1}{2}})$$

y se corrige por segunda vez

$$U^{n+1} = U^{n+\frac{1}{2}} + R_2^t z_2.$$

Eliminando la etapa intermedia se obtiene la siguiente expresión de la evolución del error del método

$$U - U^{n+1} = (I - R_2^t A_2^{-1} R_2 A)(I - R_1^t A_1^{-1} R_1 A)(U - U^n).$$

El operador matricial

$$P_i = R_i^t A_i^{-1} R_i$$

realiza la A -proyección sobre $V_{h,i}$.

1.4.2. Método de Schwarz aditivo

Conocido U^n se calculan para $i = 1, 2$

$$z_i = A_i^{-1}R_i(F - AU^n)$$

y se corrige

$$U^{n+1} = U^n + R_1^t z_1 + R_2^t z_2 = U^n + (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2)(F - AU^n).$$

Denotemos

$$M_a^{-1} := R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2.$$

Entonces el método aditivo se puede escribir

$$U^{n+1} = U^n + M_a^{-1}(F - AU^n).$$

Por tanto, este método se puede entender matricialmente como la aplicación del método de Richardson¹ para el sistema $AU = F$ con matriz de preconditionamiento M_a^{-1} , es decir, se aplica el método iterativo al sistema

$$M_a^{-1}AU = M_a^{-1}F$$

con $M_a^{-1} \cong A^{-1}$.

Nota *En algunos casos particulares de subdominios que no contienen nodos comunes, luego $N_1 + N_2 = N$, y con una adecuada numeración local y global, el método de Schwarz aditivo es igual a un método de Jacobi por bloques. De la misma forma, el método multiplicativo equivale a un método de Gauss-Seidel por bloques.*

Dada una matriz A simétrica y definida positiva, decimos que una matriz B es A -simétrica si

$$(ABU, V) = (AU, BV), \quad \forall U, V,$$

es decir, si es autoadjunta respecto del producto escalar $(\cdot, \cdot)_A := (A\cdot, \cdot)$. Ello es equivalente a que la matriz AB sea simétrica (I -simétrica). Nótese entonces que la matriz $M_a^{-1}A$ es A -simétrica de forma trivial.

De la misma forma decimos que B es A -definida positiva (abreviado A -DP), si el operador matricial asociado a B es positivo con el producto escalar $(\cdot, \cdot)_A$, es decir, si

$$(ABU, U) > 0, \quad \forall U \neq 0.$$

De nuevo, es fácil ver que si B es A -simétrica, B es A -DP si y sólo si AB es definida positiva. Por una parte

$$U^t AM_a^{-1}AU = \sum_{i=1}^2 (R_i AU)^t A_i^{-1} (R_i AU) \geq 0, \quad \forall U,$$

¹dado un sistema $Bx = b$ se plantea un esquema iterativo consistente $x_{n+1} = x_n + (b - Bx_n) = b + (I - B)x_n$, que corrige en cada paso la solución con el residuo; el método convergerá cuando la norma matricial de $I - B$ sea suficientemente pequeña

por ser A_1 y A_2 definidas positivas. Además

$$U^t A M_a^{-1} A U = 0$$

implica que

$$R_i A U = 0, \quad i = 1, 2$$

y, por tanto, $AU = 0$, de donde se deduce que U es nulo. En consecuencia $M_a^{-1}A$ es A -DP.

Por tanto, dada la matriz de preconditionamiento M_a^{-1} el sistema

$$M_a^{-1} A U = M_a^{-1} F$$

puede ser resuelto, en lugar de por el método de Richardson, por el método de Gradiente Conjugado (GC en adelante) definido con el producto escalar $(\cdot, \cdot)_A$. De esta forma la convergencia es más rápida

$$\|U - U^n\|_A \leq \left(\frac{\sqrt{\text{cond}(M_a^{-1}A)} - 1}{\sqrt{\text{cond}(M_a^{-1}A)} + 1} \right)^n \|U - U^0\|_A,$$

siendo cond el cociente entre el mayor y el menor valor propio. El método de Schwarz aditivo será entendido a partir de ahora como el preconditionamiento dado por M_a^{-1} del sistema $AU = F$ y su resolución mediante GC.

Nótese que el coste de aplicar la matriz M_a^{-1} a un vector es el de resolver simultáneamente un problema por cada subdominio.

El método de Schwarz multiplicativo se puede reescribir de forma similar con la matriz de preconditionamiento

$$M_m^{-1} := (R_1^t A_1^{-1} R_1 + R_2^t A_2^{-1} R_2 - R_2^t A_2^{-1} R_2 R_1^t A_1^{-1} R_1) A^{-1},$$

que ya no tiene las propiedades de simetría de la del aditivo. En cambio, el método multiplicativo, en su forma iterativa, es más rápido que el aditivo, luego no necesita la aceleración de convergencia que da el GC.

2. Teoría abstracta de los métodos de Schwarz

Sean V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua simétrica y V -elíptica, $f \in V'$.

Consideramos una familia finita de subespacios cerrados de V ,

$$V_i, \quad i = 0, 1, \dots, J$$

de forma que

$$V = V_0 + V_1 + \dots + V_J.$$

Consideramos el problema

$$\begin{cases} u \in V \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

que tiene solución única por el teorema de Lax-Milgram. Por el mismo resultado, las a -proyecciones sobre V_i

$$\begin{cases} P_i u \in V_i, \\ a(P_i u, \varphi) = a(u, \varphi), \quad \forall \varphi \in V_i, \end{cases}$$

están bien definidas para todo i .

2.1. Método aditivo

Definimos el operador

$$P := \sum_{i=0}^J P_i$$

y sustituimos el problema variacional que determina u por una ecuación

$$Pu = F_a$$

que tenga la misma solución.

Dado f , consideramos las soluciones de los problemas

$$\begin{cases} u_i \in V_i, \\ a(u_i, \varphi) = f(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_i, \end{cases}$$

para $i = 0, \dots, J$ y definimos

$$F_a := u_0 + \dots + u_J.$$

Entonces la solución de

$$(P) \begin{cases} u \in V, \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

es solución de

$$Pu = F_a.$$

Por tanto, la ecuación anterior tiene solución, y si P es inversible, su única solución es la de (P) . Nótese que

$$a(Pu, v) = \sum_{i=0}^J a(P_i u, v) = \sum_{i=0}^J a(P_i u, P_i v) = \sum_{i=0}^J a(u, P_i v) = a(u, Pv),$$

por la simetría de a y la definición de las proyecciones P_i , luego el operador P es a -simétrico, es decir, autoadjunto respecto del producto escalar $a(\cdot, \cdot)$. Además

$$a(Pu, u) = \sum_{i=0}^J a(P_i u, u) = \sum_{i=0}^J a(P_i u, P_i u) \geq 0,$$

de donde los valores propios de P son no negativos. Más aún, si $Pu = 0$ la expresión anterior implica que todos los $P_i u = 0$. Por tanto, como $V = V_0 + \dots + V_J$, existe una descomposición $u = u_0 + \dots + u_J$ con $u_j \in V_j$ para todo j y

$$\|u\|_a^2 = \sum_{j=0}^J a(u, u_j) = \sum_{j=0}^J a(P_j u, u_j) = 0,$$

luego P es inyectivo y la ecuación tiene solución única.

En dimensión finita, el objetivo es aplicar el método GC para resolver el sistema $Pu = F_a$. Si encontramos C_0 y C_1 positivos tales que

$$C_0^{-1}a(u, u) \leq a(Pu, u) \leq C_1a(u, u),$$

para todo u , entonces

$$\lambda_{\max}(P) = \max_{v \neq 0} \frac{a(Pv, v)}{a(v, v)} \leq C_1,$$

y

$$\lambda_{\min}(P) = \max_{v \neq 0} \frac{a(Pv, v)}{a(v, v)} \geq C_0^{-1}.$$

Por tanto, todos los autovalores son estrictamente positivos, y el condicionamiento de P cumple

$$\text{cond}(P) \leq C_0 C_1$$

El resultado siguiente debido a P.-L. Lions, ver [14], da una condición suficiente para que se tenga la cota por debajo (la constante C_0), que demuestra la (V, a) -elipticidad de P .

Lema 1 *Supongamos que existe una constante C_0 tal que todo $u \in V$ admite una descomposición*

$$u = \sum_{i=0}^J u_i, \quad u_i \in V_i,$$

que satisface

$$\sum_{i=0}^J a(u_i, u_i) \leq C_0 a(u, u).$$

Entonces

$$a(u, u) \leq C_0 a(Pu, u).$$

Demostración. Por la definición de los operadores de proyección P_i y aplicando las desigualdades de Cauchy-Schwarz en V con el producto escalar a y en \mathbb{R}^{J+1} , se tiene

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \sum_{i=0}^J a(u, u_i) = \\ &= \sum_{i=0}^J a(P_i u, u_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^J a(P_i u, P_i u)^{\frac{1}{2}} a(u_i, u_i)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^J a(P_i u, P_i u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^J a(u_i, u_i) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{C_0} \left(\sum_{i=0}^J a(P_i u, P_i u) \right)^{\frac{1}{2}} a(u, u)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$a(u, u) \leq C_0 \sum_{i=0}^J a(P_i u, P_i u) = C_0 \sum_{i=0}^J a(P_i u, u) = C_0 a(Pu, u),$$

que es la cota que queríamos demostrar. □

Por tanto, en dimensión finita, bajo las hipótesis del lema,

$$\lambda_{\min}(P) \geq \frac{1}{C_0}.$$

Nota En general se cumple para todo u

$$a(P^{-1}u, u) = \min_{\substack{u = \sum u_i \\ u_i \in V_i}} \sum_{i=0}^J a(u_i, u_i)$$

y el mínimo se alcanza únicamente en la descomposición $u_i = P_i P^{-1}u$ para todo i .

Demostración. Si tenemos una descomposición cualquiera

$$u = \sum_{i=0}^J u_i, \quad u_i \in V_i, \quad \forall i,$$

entonces aplicando de nuevo la definición de los operadores P_i y las desigualdades de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
a(P^{-1}u, u) &= \sum_{i=0}^J a(P^{-1}u, u_i) = \\
&= \sum_{i=0}^J a(P_i P^{-1}u, u_i) \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^J a(P_i P^{-1}u, P_i P^{-1}u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^J a(u_i, u_i) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left(\sum_{i=0}^J a(P_i P^{-1}u, P^{-1}u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^J a(u_i, u_i) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= a(u, P^{-1}u)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^J a(u_i, u_i) \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

luego

$$a(P^{-1}u, u) \leq \sum_{i=0}^J a(u_i, u_i).$$

Además la desigualdad es igualdad si y sólo si se tienen las $J + 1$ igualdades en la desigualdades de Cauchy-Schwarz aplicadas anteriormente, lo que ocurre si y sólo si

$$u_i = P_i P^{-1}u,$$

para todo i . □

Partiendo de las hipótesis del Lema 1 se deduce que

$$\max_{u \neq 0} \frac{a(P^{-1}u, u)}{a(u, u)} = \max_{u \neq 0} \frac{\min \sum_{i=0}^J a(u_i, u_i)}{a(u, u)} \leq C_0,$$

luego en el caso finito-dimensional

$$\lambda_{min}^{-1}(P) = \lambda_{max}(P^{-1}) \leq C_0.$$

El resultado que sigue estudia la cota contraria. Por conveniencia respecto de los métodos que se aplican en la práctica, el espacio V_0 es tratado de forma diferente.

Lema 2 *Supongamos que existen $\varepsilon_{i,j}$ constantes reales tales que*

$$0 \leq \varepsilon_{i,j} \leq 1, \quad \varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{j,i}$$

y que

$$a(u_i, u_j) \leq \varepsilon_{i,j} a(u_i, u_i)^{\frac{1}{2}} a(u_j, u_j)^{\frac{1}{2}},$$

para todo $u_i \in V_i, u_j \in V_j$ y para todo $i, j = 1, \dots, J$. Si denotamos por $\rho(\mathcal{E})$ el radio espectral de la matriz (simétrica)

$$\mathcal{E} := (\varepsilon_{i,j})_{i,j=1}^J,$$

entonces

$$a(Pu, u) \leq (\rho(\mathcal{E}) + 1)a(u, u)$$

para todo $u \in V$.

Demostración. Descomponemos primero

$$a(Pu, u) = a\left(\sum_{i=1}^J P_i u, u\right) + a(P_0 u, u)$$

y estudiaremos los dos sumandos por separado.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$a(P_0 u, u) \leq a(P_0 u, P_0 u)^{\frac{1}{2}} a(u, u)^{\frac{1}{2}} = \|P_0 u\|_a a(u, u)^{\frac{1}{2}} \leq a(u, u),$$

ya que la norma de P_0 como operador en V con producto escalar $a(\cdot, \cdot)$ es menor o igual que uno por ser una proyección ortogonal.

Por otra parte

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=1}^J P_i u, \sum_{j=1}^J P_j u\right) &= \sum_{i,j=1}^J a(P_i u, P_j u) \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^J \varepsilon_{i,j} a(P_i u, P_i u)^{\frac{1}{2}} a(P_j u, P_j u)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \mathbf{v}^t \mathcal{E} \mathbf{v}, \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{v}^t := \left(a(P_1 u, P_1 u)^{\frac{1}{2}}, \dots, a(P_J u, P_J u)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Como \mathcal{E} es simétrica, entonces

$$\|\mathcal{E}\|_2 = \rho(\mathcal{E}^t \mathcal{E})^{\frac{1}{2}} = \rho(\mathcal{E})$$

y por otra parte, para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$,

$$\frac{\mathbf{v}^t \mathcal{E} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^t \mathbf{v}} \leq \|\mathcal{E}\|_2,$$

luego se deduce que

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=1}^J P_i u, \sum_{j=1}^J P_j u\right) &\leq \rho(\mathcal{E}) \sum_{i=1}^J a(P_i u, P_i u) = \\ &= \rho(\mathcal{E}) \sum_{i=1}^J a(P_i u, u) \leq \\ &\leq \rho(\mathcal{E}) a\left(\sum_{i=1}^J P_i u, \sum_{i=1}^J P_i u\right)^{\frac{1}{2}} a(u, u)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

aplicando una vez más la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Finalmente

$$a\left(\sum_{i=1}^J P_i u, u\right) \leq a\left(\sum_{i=1}^J P_i u, \sum_{i=1}^J P_i u\right)^{\frac{1}{2}} a(u, u)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(\mathcal{E}) a(u, u),$$

de donde se deduce el resultado. \square

Por tanto, en el caso finitodimensional,

$$\lambda_{\max}(P) \leq \rho(\mathcal{E}) + 1.$$

Nota Las hipótesis del lema implican que para todo i ,

$$\varepsilon_{i,i} = 1,$$

ya que basta tomar el mismo elemento como primera y segunda componente. Por tanto la traza de \mathcal{E} es J , de donde se deduce que $\rho(\mathcal{E}) \geq 1$.

Restringidos al caso en que V tenga dimensión finita, el método de Schwarz aditivo queda en su versión abstracta como sigue. Se resuelven problemas en los subespacios V_i para calcular el término independiente del sistema $Pu = F_a$. Seguidamente, como P es simétrica y definida positiva respecto del producto escalar $a(\cdot, \cdot)$, el sistema se puede resolver mediante el método de gradiente conjugado con el anterior producto escalar. Cada paso del método GC exige multiplicar un vector por la matriz P , luego calcular las a -proyecciones P_i del vector, es decir, resolver un problema en el subespacio V_i . La velocidad de convergencia viene controlada por el condicionamiento de P (ver sección precedente), luego se puede expresar en función de C_0 y $\rho(\mathcal{E})$.

2.2. Método multiplicativo

Con las notaciones e hipótesis de la introducción de esta teoría abstracta nos planteamos un esquema iterativo para la resolución del problema

$$\begin{cases} u \in V, \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Dada u^n aproximación de u , calculamos

$$\begin{aligned} z_{-1} &= u^n \\ z_i &= z_{i-1} + P_i(u - z_{i-1}), \quad i = 0, \dots, J \\ u^{n+1} &= z_J. \end{aligned}$$

En cada paso se realiza la a -proyección sobre uno de los subespacios del residuo del paso anterior. Esta proyección no requiere conocer u , puesto que $P_i u$ se conoce resolviendo el problema

$$\begin{cases} P_i u \in V_i, \\ a(P_i u, \varphi) = a(u, \varphi) = f(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_i. \end{cases}$$

Nótese que estos problemas se resolvían también para llegar a la expresión como ecuación del método aditivo.

Denotamos

$$E_J := (I - P_J) \dots (I - P_1)(I - P_0),$$

que es el operador de amplificación del error del método. Consideramos su norma

$$\|E_J\| := \sup_{0 \neq v \in V} \frac{a(E_J v, v)}{a(v, v)},$$

que acota la amplificación del error medido en norma $\|\cdot\|_a$.

Teorema 1 (Bramble et al [7]) *Supongamos que se satisfacen las hipótesis de los lemas 1 y 2. Entonces*

$$\|E\| \leq \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 2\rho(\mathcal{E})^2)C_0}}.$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} E_{-1} &:= I, \\ E_j &:= (I - P_j) \dots (I - P_0), \quad j = 0, \dots, J. \end{aligned}$$

Obviamente para todo $j \geq 0$,

$$E_j = (I - P_j)E_{j-1}.$$

Denotamos por \cdot^T la trasposición de un operador respecto del producto escalar $a(\cdot, \cdot)$. Entonces, hemos visto en el estudio del método aditivo que

$$P_i^T = P_i$$

para todo i . En consecuencia es inmediato ver que

$$E_{j-1}^T E_{j-1} - E_j^T E_j = E_{j-1}^T P_j E_{j-1}.$$

Por tanto, sumando

$$I - E_J^T E_J = \sum_{k=0}^J E_{k-1}^T P_k E_{k-1}. \quad (1)$$

Por otra parte,

$$E_{j-1} - E_j = P_j E_{j-1},$$

luego

$$I = E_{j-1} + \sum_{k=0}^{j-1} P_k E_{k-1} \quad (2)$$

para todo $j \geq 1$.

Notemos que $a(P_j \cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica y semidefinida positiva, luego se puede aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz respecto de ella. Entonces, fijado $j > 0$ y aplicando (2) se tiene

$$\begin{aligned} a(P_j u, u) &= a(P_j u, E_{j-1} u) + a(P_j u, P_0 u) + \sum_{k=1}^{j-1} a(P_j u, P_k E_{k-1} u) \leq \\ &\leq a(P_j u, u)^{\frac{1}{2}} \left(a(P_j E_{j-1} u, E_{j-1} u)^{\frac{1}{2}} + a(P_j P_0 u, P_0 u)^{\frac{1}{2}} \right) + \sum_{k=1}^{j-1} a(P_j u, P_k E_{k-1} u). \end{aligned}$$

Aplicando la segunda hipótesis (ver enunciado del lema 2) y simplificando (nótese que $a(P_j u, P_j u) = a(P_j u, u)$ por la definición de P_j)

$$\begin{aligned} a(P_j u, u)^{\frac{1}{2}} &\leq a(P_j E_{j-1} u, E_{j-1} u)^{\frac{1}{2}} + a(P_j P_0 u, P_0 u)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{j-1} \varepsilon_{j,k} a(P_k E_{k-1} u, P_k E_{k-1} u)^{\frac{1}{2}} = \\ &= a(P_j P_0 u, P_0 u)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^j \varepsilon_{j,k} a(P_k E_{k-1} u, E_{k-1} u)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq a(P_j P_0 u, P_0 u)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^J \varepsilon_{j,k} a(P_k E_{k-1} u, E_{k-1} u)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donde hemos aplicado que $\varepsilon_{j,j} = 1$, como se indica en la subsección anterior.

Sea

$$\mathbf{v}^t := \left(a(P_1 E_0 u, E_0 u)^{\frac{1}{2}}, \dots, a(P_J E_{J-1} u, E_{J-1} u)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Elevando al cuadrado en la expresión anterior y aplicando que $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, se tiene

$$a(P_j u, u) \leq 2a(P_j P_0 u, P_0 u) + 2(\mathcal{E}\mathbf{v})_j^2.$$

Por tanto sumando desde $j = 1, \dots, J$,

$$a\left(\sum_{j=1}^J P_j u, u\right) \leq 2a\left(\sum_{j=1}^J P_j P_0 u, P_0 u\right) + 2\|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_2^2. \quad (3)$$

En la demostración del Lema 2 se ve que para todo $v \in V$

$$a\left(\sum_{j=1}^J P_j v, v\right) \leq \rho(\mathcal{E})a(v, v),$$

lo que aplicado a $P_0 u$ demuestra, por (3),

$$\begin{aligned} a(Pu, u) &= a(P_0 u, u) + a\left(\sum_{j=1}^J P_j u, u\right) \leq \\ &\leq a(P_0 u, u) + 2\rho(\mathcal{E})a(P_0 u, P_0 u) + 2\|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_2^2 \leq \\ &\leq (1 + 2\rho(\mathcal{E}))a(P_0 u, u) + 2\rho(\mathcal{E})^2\|\mathbf{v}\|_2^2, \end{aligned}$$

puesto que \mathcal{E} es simétrica. Notemos que por su definición

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|_2^2 &= \sum_{k=1}^J a(P_k E_{k-1} u, E_{k-1} u) = \\ &= \sum_{k=1}^J a(E_{k-1}^T P_k E_{k-1} u, u) = \\ &= a((I - E_J^T E_J)u, u) - a(P_0 u, u),\end{aligned}$$

aplicando (1). Puesto que $\rho(\mathcal{E}) \geq 1$ –ver nota en la subsección anterior– y como se cumple el Lema 1,

$$\begin{aligned}C_0^{-1}a(u, u) &\leq a(Pu, u) \leq \\ &\leq (1 + 2\rho(\mathcal{E})^2) (a(P_0 u, u) + \|\mathbf{v}\|_2^2) = \\ &= (1 + 2\rho(\mathcal{E})^2) a((I - E_J^T E_J)u, u).\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|E_J^T E_J\| \leq 1 - \frac{1}{K},$$

siendo

$$K := C_0(1 + 2\rho(\mathcal{E})^2).$$

De allí se deduce el resultado, puesto que

$$a(E_J u, u) \leq a(E_J u, E_J u)^{\frac{1}{2}} a(u, u)^{\frac{1}{2}} \leq \|E_J^T E_J\|^{\frac{1}{2}} a(u, u),$$

para todo $u \in V$. □

Nótese que el operador $I - E_J^T E_J$ es el del método simetrizado, ya que

$$E_J^T E_J = (I - P_0) \dots (I - P_{J-1})(I - P_J)(I - P_{J-1}) \dots (I - P_0),$$

que corresponde a volver a resolver y corregir en los subespacios en orden inverso una vez se ha llegado al último.

Nótese también, que si $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_J$, entonces $\mathcal{E} = I$ y $C_0 = 1$. En el caso finito-dimensional el condicionamiento del sistema es 1, luego el gradiente conjugado converge en una sólo iteración.

3. Método de Schwarz con solapamiento

Sea Ω un abierto poliédrico de \mathbb{R}^2 y consideremos el problema de contorno

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(\mathbf{x})\nabla u) = f, & \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

siendo $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ suficientemente regular, simétrica y uniformemente definida positiva para todo \mathbf{x} , y f en las condiciones habituales para estos problemas.

Denotaremos

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u^t A \nabla v d\mathbf{x},$$

y

$$f(v) := \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}.$$

La formulación variacional del problema anterior es, entonces,

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

El problema satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram, luego tiene solución única.

3.1. Discretización del problema

Sea \mathcal{T}_H una triangulación del dominio Ω

$$\mathcal{T}_H := \{\hat{\Omega}_i; i = 1, \dots, J\},$$

regular y casi-uniforme. Por tanto el diámetro todos los $\hat{\Omega}_i$ es un $\mathcal{O}(H)$. Sea δ suficientemente pequeño. Entonces construimos unos subdominios poligonales Ω_i , de forma que $\hat{\Omega}_i \subset \Omega_i$, que la distancia entre las partes de la frontera de Ω_i y $\hat{\Omega}_i$ contenidas en Ω sea un $\mathcal{O}(\delta)$ y que el diámetro de Ω_i sea un $\mathcal{O}(H + \delta)$.

Realizamos una nueva triangulación regular casi-uniforme \mathcal{T}_h de Ω que respete las descomposición en subdominios solapados y la triangulación gruesa \mathcal{T}_H , es decir, exigimos que la clausura de cada $\hat{\Omega}_i$ y de cada Ω_i sea unión de elementos de la triangulación.

Definimos los espacios de elementos finitos P_1 asociados a las dos triangulaciones²,

$$\begin{aligned} V_H &:= \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_{\hat{\Omega}_i} \in P^1, i = 1, \dots, J\} \\ V_h &:= \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_T \in P^1, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \end{aligned}$$

Denotamos por

$$V_i := V_h \cap H_0^1(\Omega_i), \quad i = 1, \dots, J,$$

²si tomamos 2-paralelotopos, el conjunto de interpolación será el transformado de Q_1 , en lugar de P_1

a los elementos finitos con soporte en la clausura de Ω_i . Finalmente

$$V_0 := V_H$$

es empleado para poner en relación grados de libertad de todos los subdominios y evitar que la transmisión de información del método de Schwarz (de subdominio a subdominio) sea únicamente local.

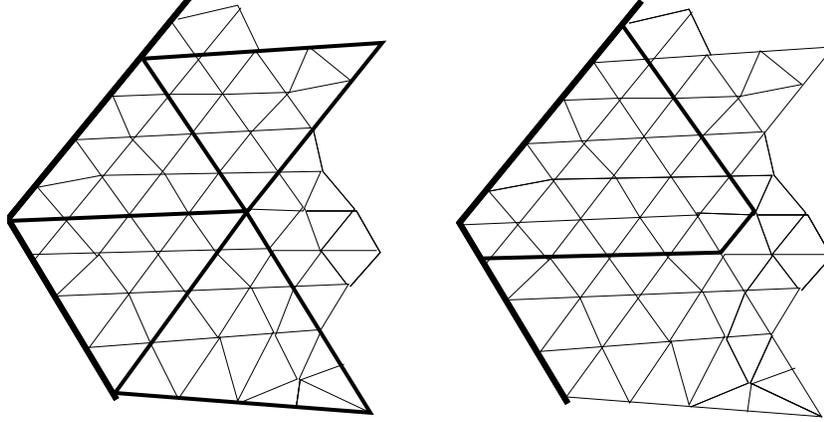


Figura 3: Método con solapamiento: la figura de la izquierda muestra las triangulaciones fina y gruesa; la figura de la derecha muestra cómo uno de los triángulos del mallado grueso da lugar a uno de los dominios simples. Se resuelven problemas discretos en el mallado grueso y en los subdominios.

Si para cada $i \neq 0$, k_i es el número de subdominios Ω_j con $j \neq i$ tales que $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ y k_0 es el número máximo de subdominios a los que puede pertenecer un punto de Ω se tiene la siguiente propiedad:

Proposición 1 *En las hipótesis dadas sobre regularidad y casi-uniformidad de la triangulación gruesa (con δ suficientemente menor que H) los k_i , $i = 0, \dots, J$ son independientes del número de subdominios J .*

Como

$$V_1 + \dots + V_J = V_h$$

y

$$V_0 = V_H \subset V_h,$$

estamos en la situación del marco abstracto de los métodos de Schwarz y podemos plantearnos el estudio de la convergencia de los métodos aditivo y multiplicativo. Obviamente, los problemas variacionales en los subespacios –es decir, el cálculo de las proyecciones P_i – son resoluciones de problemas de elementos finitos en los subdominios cuando $i \neq 0$ o en el mallado grueso de Ω con $i = 0$.

Estudiaremos la convergencia a partir de los dos parámetros que aparecen en la teoría abstracta, C_0 y $\rho(\mathcal{E})$. Estos parámetros serán puestos en relación, a su vez, con los parámetros de la discretización: H , δ y h .

Las hipótesis del Lema 2 son fáciles de verificar y $\rho(\mathcal{E})$ es estimable inmediatamente a partir de la proposición anterior. El estudio de la constante C_0 es considerablemente más complicado y se realizará en apartados sucesivos.

Proposición 2 *Las hipótesis del Lema 2 se satisfacen con una matriz \mathcal{E} cuyo radio espectral está acotado de la siguiente forma*

$$\rho(\mathcal{E}) \leq \max_{1 \leq i \leq J} (k_i + 1).$$

Demostración. Notemos que

$$a(u_i, u_j) = 0$$

para todo $u_i \in V_i, u_j \in V_j$ si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ y que en otro caso se puede tomar, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\varepsilon_{i,j} = 1$. Por tanto, la fila i -ésima de \mathcal{E} tiene $k_i + 1$ elementos iguales a 1 y los demás nulos. En consecuencia

$$\rho(\mathcal{E}) \leq \|\mathcal{E}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq J} \sum_{j=1}^J |\varepsilon_{i,j}| = \max_{1 \leq i \leq J} (k_i + 1)$$

y el resultado queda demostrado. \square

3.2. Resultados técnicos

Durante esta sección consideraremos un dominio poligonal Ω a la que hay asociada una triangulación regular casi-uniforme \mathcal{T}_h y un espacio de elementos finitos P_1 continuos, denotado V_h , con valores nulos en la frontera de Ω .

Las siguientes desigualdades inversas se demuestran fácilmente pasando al triángulo de referencia y aplicando allí la equivalencia de normas en espacios de dimensión finita. Para las transformaciones de las seminormas entre elementos relacionados por transformaciones afines, ver Ciarlet [9].

Lema 3 *Existe C independiente de h tal que*

$$|u_h|_{1,\Omega} \leq Ch^{-1} \|u_h\|_{0,\Omega}$$

para todo $u_h \in V_h$. Además

$$h \left(\sum_i |u_h(\mathbf{x}_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde la suma se realiza sobre los nodos del mallado, define en V_h una norma h -uniformemente equivalente a la norma $\|\cdot\|_{0,\Omega}$. Finalmente si denotamos $\beta_{i,j} = 1$ si los nodos \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j son contiguos y cero en caso contrario

$$\left(\sum_{i,j} \beta_{i,j} (u_h(\mathbf{x}_i) - u_h(\mathbf{x}_j))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

(por tanto la suma se realiza sobre nodos vecinos), define en V_h una seminorma h -uniformemente equivalente a $|\cdot|_{1,\Omega}$.

Sea $Q_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$ la proyección ortogonal sobre V_h respecto del producto escalar de $L^2(\Omega)$.

Lema 4 *Existe C independiente de h tal que*

$$\|u - Q_h u\|_{0,\Omega} \leq Ch|u|_{1,\Omega},$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Por los resultados de interpolación de Lagrange polinómica en espacios de Sobolev y denotando $I_h : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ al operador de interpolación asociado a V_h

$$\|u - Q_h u\|_{0,\Omega} \leq \|u - I_h u\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{2,\Omega},$$

para todo $u \in H^2(\Omega)$. Por definición del operador de proyección ortogonal,

$$\|u - Q_h u\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{0,\Omega}$$

para todo $u \in L^2(\Omega)$. Aplicando, finalmente la teoría de espacios intermedios (ver, por ejemplo, Lions y Magenes [15] o Bramble [1], apéndice B) se tiene

$$\|u - Q_h u\|_{0,\Omega} \leq Ch \|u\|_{1,\Omega}$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$. La equivalencia de la norma y la seminorma en $H_0^1(\Omega)$ prueba el resultado final. \square

Lema 5 *Existe C independiente de h tal que*

$$|Q_h u|_{1,\Omega} \leq C|u|_{1,\Omega},$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Sea \hat{Q} el operador de proyección ortogonal sobre P_1 respecto de $L^2(\hat{T})$ en el elemento de referencia. Aplicando que en un espacio de dimensión finita todas las normas son equivalentes y que \hat{Q} es estable en $L^2(\hat{T})$, se tienen las desigualdades

$$|\hat{Q}\hat{u}|_{1,\hat{T}} \leq \|\hat{Q}\hat{u}\|_{1,\hat{T}} \leq \hat{C}\|\hat{Q}\hat{u}\|_{0,\hat{T}} \leq \hat{C}\|\hat{u}\|_{0,\hat{T}} \leq \hat{C}\|\hat{u}\|_{1,\hat{T}},$$

para todo $\hat{u} \in H^1(\hat{T})$. Como para todo $c \in P_0$,

$$|\hat{Q}(\hat{u} + c)|_{1,\hat{T}} = |\hat{Q}\hat{u} + c|_{1,\hat{T}} = |\hat{Q}\hat{u}|_{1,\hat{T}},$$

se deduce que

$$|\hat{Q}\hat{u}|_{1,\hat{T}} \leq \hat{C} \inf_{c \in P_0} \|\hat{u} + c\|_{1,\hat{T}} \leq \hat{C}' |\hat{u}|_{1,\hat{T}},$$

por la equivalencia de la norma cociente $H^1(\hat{T})/P_0$ y la seminorma de $H^1(\hat{T})$.

Sea F la transformación afín inversible que pasa del triángulo de referencia \hat{T} a un triángulo cualquiera (fijado) de la partición de Ω . Denotemos Q_T a la proyección $L^2(T)$ -ortogonal sobre P_1 . Entonces para todo $u \in L^2(T)$,

$$Q_T u \circ F =: \widehat{Q_T u} = \hat{Q} \hat{u} := \hat{Q}(u \circ F),$$

luego para todo $u \in H^1(T)$,

$$|Q_T u|_{1,T} \leq C|u|_{1,T},$$

con la constante C independiente del triángulo (para ver cómo los cambios de variable afines aparecen en las seminormas de Sobolev ver Ciarlet [9], por ejemplo).

Finalmente,

$$\begin{aligned} |Q_h u|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |Q_h u|_{1,T}^2 \leq \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |Q_h u - Q_T u|_{1,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |Q_T u|_{1,T}^2 \leq \\ &\leq Ch^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|Q_h u - Q_T u\|_{0,T}^2 + C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{1,T}^2 \leq \\ &\leq Ch^{-2} \|Q_h u - u\|_{0,\Omega}^2 + Ch^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|Q_T u - u\|_{0,T}^2 + C|u|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

y por el Lema 4 y dado que

$$\|u - Q_T u\|_{0,T} \leq \|u - Q_h u\|_{0,T},$$

se deduce el resultado. □

Lema 6 Sean H el diámetro de Ω y $\delta < H$. Definimos el conjunto

$$\Gamma_\delta := \{\mathbf{x} \in \Omega : d(\mathbf{x}, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Entonces

$$\|u\|_{0,\Gamma_\delta}^2 \leq C\delta^2 \left(\left(1 + \frac{H}{\delta}\right) |u|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{\delta H} \|u\|_{0,\Omega}^2 \right),$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Demostración. La haremos con detalle para el caso $\Omega := (0, H) \times (0, H)$, cuyo diámetro es un $\mathcal{O}(H)$. Sea $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Entonces para todo $x, y \in (0, H)$,

$$u(x, 0) = u(x, y) - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) dt,$$

luego

$$\begin{aligned} u(x, 0)^2 &\leq 2u(x, y)^2 + 2 \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) dt \right)^2 \leq \\ &\leq 2u(x, y)^2 + 2 \int_0^y dt \int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right)^2 dt \leq \\ &\leq 2u(x, y)^2 + 2H \int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Integrando a ambos lados, se tiene

$$\int_0^H u(x, 0)^2 dx \leq 2 \int_0^H u(x, y)^2 dx + 2H \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{0, \Omega}^2,$$

para todo $y \in (0, H)$. Por tanto, integrando respecto de y se obtiene

$$H \int_0^H u(x, 0)^2 dx \leq 2 \|u\|_{0, \Omega}^2 + 2H^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{0, \Omega}^2. \quad (4)$$

Consideremos el rectángulo $(0, H) \times (0, \delta) \subset \Gamma_\delta$. De la misma forma que antes, para todo $y \in (0, \delta)$, $x \in (0, H)$,

$$u(x, y)^2 \leq 2u(x, 0)^2 + 2 \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) dt \right)^2 \leq 2u(x, 0)^2 + 2\delta \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right)^2 dt,$$

de donde

$$\int_0^H u(x, y)^2 dx \leq 2 \int_0^H u(x, 0)^2 dx + 2\delta \int_0^H \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right)^2 dx dt.$$

Aplicando (4), se deduce que para todo $y \in (0, \delta)$,

$$\begin{aligned} \int_0^H u(x, y)^2 dx &\leq \frac{4}{H} \|u\|_{0, \Omega}^2 + 4H \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{0, \Omega}^2 + 2\delta \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{0, \Omega}^2 \leq \\ &\leq \frac{4}{H} \|u\|_{0, \Omega}^2 + (4H + 2\delta) \|u\|_{1, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Integrando respecto de y en $(0, \delta)$, se obtiene

$$\int_0^H \int_0^\delta u(x, y)^2 dx dy \leq C \left(\frac{\delta}{H} \|u\|_{0, \Omega}^2 + (H\delta + \delta^2) \|u\|_{1, \Omega}^2 \right).$$

El proceso se puede realizar en las otras cuatro regiones restantes, cuya unión (no disjunta) resulta Γ_δ . De este modo se prueba el lema en $\Omega = (0, H) \times (0, H)$ para funciones de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Por densidad, el resultado se extiende a $H^1(\Omega)$.

Para realizar el caso general se toma un sistema de coordenadas locales, asociado a un sistema de cartas locales adecuado. Ver Nečas [17]. \square

3.3. Convergencia del método

Los resultados anteriores nos ponen ya en disposición de probar la cota inferior de los valores propios de la matriz asociada a la descomposición de dominio. Para aplicar el Lema 2 (ver teoría abstracta) se busca una descomposición de cada elemento de $V = V_h$

$$u = u_H + \sum_{i=1}^J u_i$$

de forma que

$$\sum_{j=0}^J a(u_j, u_j) \leq C_0 a(u, u),$$

con C_0 independiente de u y que permanezca acotada cuando $h \rightarrow 0$ y cuando $H \rightarrow 0$, es decir, cuando el número de subdominios aumenta. En particular, dado cualquier $u \in V$ y una elección $u_H \in V_H$, se tiene una descomposición

$$u = u_H + (u - u_H) = u_H + \sum_{i=1}^J I_h(\theta_i(u - u_H)),$$

siendo $\{\theta_i\}$ una partición de la unidad asociada al recubrimiento de Ω . Una primera posibilidad sería tomar $u_H = I_H u$, siendo I_H el operador de interpolación respecto de la triangulación gruesa. No obstante, para obtener el resultado deseado necesitaríamos la existencia de una constante $C(h, H)$ acotada cuando h y H tienden a cero y tal que

$$|I_H u|_{1, \Omega} \leq C |u|_{1, \Omega},$$

para todo $u \in V_h$. Esto no es posible, ya que la interpolación no está definida en todo $H^1(\Omega)$. En el siguiente Teorema veremos una elección más apropiada para u_H .

Teorema 2 *Existe C constante independiente de H, δ y h tal que todo $u \in V_h$ tiene una descomposición*

$$u = \sum_{i=0}^J u_i, \quad u_i \in V_i,$$

que satisface

$$\sum_{i=0}^J a(u_i, u_i) \leq C k_0 \left(1 + \frac{H}{\delta}\right) a(u, u).$$

Demostración. Sea $Q_H : V_h \rightarrow V_H$ el operador de proyección ortogonal sobre V_H respecto del producto escalar $L^2(\Omega)$. Dado $u \in V_h$ denotamos

$$u_0 := Q_H u \in V_H, \quad w := u - u_0 \in V_h.$$

Consideramos $\{\theta_i\}_{i=1}^J$, partición \mathcal{C}^1 de la unidad asociada al recubrimiento $\{\Omega_i\}$ de $\bar{\Omega}$. Exigimos que para todo i ,

$$\begin{aligned} \theta_i &\in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), & 0 \leq \theta_i(\mathbf{x}) \leq 1, & \quad \forall \mathbf{x}, \\ \theta_i &\equiv 0, & \text{en } \Omega \setminus \Omega_i, & \quad \theta_i(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{si } d(\mathbf{x}, \partial\Omega_i) > \delta, \\ & & & \quad \|\nabla \theta_i\|_\infty \leq \frac{C}{\delta}. \end{aligned}$$

Entonces sean

$$w_i := I_h(\theta_i w) \in V_i,$$

para $i = 1, \dots, J$. Obviamente, como $w \in V_h$,

$$w = I_h w = I_h \left(\sum_{i=1}^J \theta_i w \right) = \sum_{i=1}^J w_i,$$

luego

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^J w_i.$$

Por la continuidad de la forma bilineal y la desigualdad de Poincaré,

$$a(w_i, w_i) \leq C |I_h(\theta_i w)|_{1,\Omega}^2 = C |I_h(\theta_i w)|_{1,\Omega_i}^2,$$

ya que el soporte de $I_h(\theta_i w)$ está contenido en Ω_i . Aplicando el Lema 3,

$$\begin{aligned} a(w_i, w_i) &\leq C \sum_{k,l} \beta_{k,l} (\theta_i(\mathbf{x}_k) w(\mathbf{x}_k) - \theta_i(\mathbf{x}_l) w(\mathbf{x}_l))^2 \leq \\ &\leq 2C \sum_{k,l} \beta_{k,l} \theta_i(\mathbf{x}_k)^2 (w(\mathbf{x}_k) - w(\mathbf{x}_l))^2 + 2C \sum_{k,l} \beta_{k,l} w(\mathbf{x}_k)^2 (\theta_i(\mathbf{x}_k) - \theta_i(\mathbf{x}_l))^2, \end{aligned}$$

donde la suma se realiza sobre los nodos del mallado y $\beta_{k,l}$ es un indicador de si los nodos \mathbf{x}_k y \mathbf{x}_l son vecinos (en cuyo caso vale 1) o no (entonces vale 0).

Sea $\Gamma_{i,\delta}$ el conjunto de los puntos \mathbf{x} de Ω_i tales que $d(\mathbf{x}, \partial\Omega_i) < \delta$. En los nodos que no pertenecen a su clausura, θ_i es idénticamente igual a la unidad. Por tanto, el segundo sumatorio de la expresión anterior puede restringirse a nodos contiguos tales que el primero de ellos pertenece a $\Gamma_{i,\delta}$. Si \mathbf{x}_k y \mathbf{x}_l están en la situación anterior

$$(\theta_i(\mathbf{x}_k) - \theta_i(\mathbf{x}_l))^2 \leq \left(\frac{C}{\delta} \right)^2 h^2,$$

por el teorema del valor medio. En el primer sumando de la expresión anterior aplicamos que $|\theta_i(\mathbf{x})| \leq 1$ para todo \mathbf{x} , y obtenemos

$$a(w_i, w_i) \leq C \sum_{k,l} \beta_{k,l} (w(\mathbf{x}_k) - w(\mathbf{x}_l))^2 + C' \frac{h^2}{\delta^2} \sum_{\mathbf{x}_l \in \Gamma_{i,\delta}} w(\mathbf{x}_l)^2,$$

ya que el número de nodos a los que \mathbf{x}_l es contiguo es acotado, debido a la regularidad del mallado. Aplicamos de nuevo el Lema 3 (notando que las constantes de equivalencia de las normas no dependen del tamaño del dominio, luego las podemos aplicar independientemente de i) y seguidamente el Lema 6, se tiene

$$a(w_i, w_i) \leq C \left(|w|_{1,\Omega_i}^2 + \frac{C}{\delta^2} \|w\|_{0,\Gamma_{i,\delta}}^2 \right) \leq C \left(\left(1 + \frac{H}{\delta} \right) |w|_{1,\Omega_i}^2 + \frac{1}{\delta H} \|w\|_{0,\Omega_i}^2 \right).$$

Como

$$\sum_{i=1}^J \|v\|_{0,\Omega_i}^2 \leq k_0 \|v\|_{0,\Omega}^2,$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$ por definición de k_0 , sumando en $i = 1, \dots, J$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^J a(w_j, w_j) \leq Ck_0 \left(\left(1 + \frac{H}{\delta}\right) |w|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{\delta H} \|w\|_{0,\Omega}^2 \right).$$

De los Lemas 4 y 5 se deduce que

$$\|w\|_{0,\Omega}^2 = \|u - Q_H u\|_{0,\Omega}^2 \leq CH^2 |u|_{1,\Omega}^2$$

y que

$$|w|_{1,\Omega} = |u - Q_H u|_{1,\Omega} \leq |u|_{1,\Omega} + |Q_H u|_{1,\Omega} \leq C|u|_{1,\Omega},$$

luego

$$\sum_{i=1}^J a(w_j, w_j) \leq Ck_0 \left(1 + \frac{H}{\delta}\right) |u|_{1,\Omega}^2 \leq C'k_0 \left(1 + \frac{H}{\delta}\right) a(u, u).$$

Por último

$$a(u_0, u_0) \leq C|Q_H u|_{1,\Omega}^2 \leq C'|u|_{1,\Omega},$$

y el resultado es inmediato. \square

Nótese que si no hubiéramos utilizado el espacio $V_0 = V_H$ aparecería un H en el denominador y la convergencia del método empeoraría con el aumento del número de subdominios.

Nota *En el método de Schwarz multiplicativo es útil realizar primero una coloración del conjunto de dominios Ω_i , de modo que dos dominios con intersección no vacía tengan asociados colores distintos. De esta forma, y tratando de minimizar el número de colores, se pueden resolver a la vez los problemas discretos en dominios del mismo color, ya que están totalmente desacoplados y esta parte del algoritmo es paralelizable.*

Como último comentario a este método, nótese que no es posible mantener a la vez pequeños la dimensión del problema en V_H , que es de orden $1/H$, y H/h , que controla la convergencia del método de Schwarz, si tomamos un solapamiento mínimo $\delta \simeq h$. Cuando el problema V_H es muy grande, es posible plantearse el resolverlo de nuevo por descomposición de dominio. Esta es la idea de los métodos multinivel, que estudiaremos seguidamente.

4. Método multinivel

Nos planteamos el mismo problema modelo de la sección anterior, sobre un abierto Ω poligonal.

Consideremos una sucesión de triangulaciones regulares

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^1 &:= \{\tau_i^1\}_{i=1}^{N_1}, \\ \mathcal{T}^2 &:= \{\tau_i^2\}_{i=1}^{N_2}, \\ &\vdots \\ \mathcal{T}^L &:= \{\tau_i^L\}_{i=1}^{N_L},\end{aligned}$$

de tal forma que la malla \mathcal{T}^{l+1} es un refinamiento de la anterior, es decir, los triángulos de \mathcal{T}^l son uniones de triángulos de \mathcal{T}^{l+1} .

Denotamos

$$h_k := \max_{1 \leq i \leq N_k} (\text{diám}(\tau_i^k)),$$

y

$$h := h_L.$$

Hipótesis Existe $\gamma < 1$ tal que si el triángulo τ_i^{k+l} está contenido en τ_j^k , entonces

$$\frac{\text{diám}(\tau_i^{k+l})}{\text{diám}(\tau_j^k)} \approx \gamma^l.$$

Esta hipótesis está relacionada con las cotas sobre $\rho(\mathcal{E})$ e implica una cierta uniformidad en la forma de refinar los mallados.

Denotamos por V^l (con $l = 1, \dots, L$) al espacio de elementos finitos P_1 asociados a la triangulación \mathcal{T}^l . Obviamente $V^l \subset V^{l+1}$. Sea

$$V := V^L = \sum_{l=1}^L V^l.$$

Para $l = 2, \dots, L$ suponemos que existe un recubrimiento de Ω , $\{\Omega_i^l\}_{i=1}^{N_l}$ en las siguientes condiciones:

- la clausura de cada Ω_i^l es unión de triángulos de \mathcal{T}^l ;
- el diámetro de Ω_i^l es un $\mathcal{O}(h_{l-1})$, es decir, cada elemento del recubrimiento en el nivel l tiene el tamaño del orden de los elementos del nivel anterior (más grueso);
- existe una partición de la unidad en Ω asociada al recubrimiento $\{\Omega_i^l\}_{i=1}^{N_l}$, que denotaremos $\{\theta_i^l\}_{i=1}^{N_l}$ tal que para todo i

$$\theta_i^l \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \quad 0 \leq \theta_i^l(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x},$$

$$\|\nabla \theta_i^l\|_\infty \leq \frac{C}{h_{l-1}}.$$

Una forma de construir estos recubrimientos es como sigue: para $l = 2, \dots, L$ consideramos cada τ_i^{l-1} (triángulo del nivel anterior) y lo engrosamos hasta obtener un $\tilde{\tau}_i^{l-1}$ de modo que

$$d(\partial\tilde{\tau}_i^{l-1}, \partial\tau_i^{l-1}) = \mathcal{O}(h_{l-1})$$

y que $\tilde{\tau}_i^{l-1}$ sea reunión de elementos de la triangulación \mathcal{T}^{l-1} . Entonces tomamos Ω_i^l igual al interior de $\tilde{\tau}_i^{l-1}$. Por tanto, con esta construcción, los distintos polígonos que forman el recubrimiento están ‘muy solapados’, ya que el tamaño del solapamiento es del mismo orden que el del triángulo del que procede el engrosamiento.

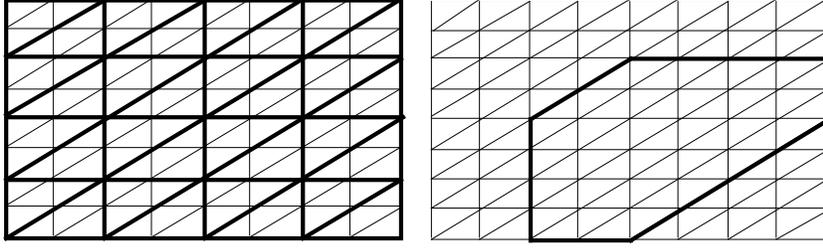


Figura 4: Método multinivel. La primera figura muestra dos niveles consecutivos ($\gamma = 1/2$). La segunda figura muestra uno de los dominios elementales construidos por engrosamiento de un triángulo del mallado grueso. En cada dominio de este tipo se resuelve el problema discreto con el mallado fino.

Denotamos, para $l \geq 2$, $M_l := N_{l-1}$ y $M_1 := 1$. Entonces consideramos los subespacios

$$V_i^l := V^l \cap H_0^1(\Omega_i^l), \quad l = 2, \dots, L, \quad i = 1, \dots, M_l,$$

es decir, los espacios de elementos finitos asociados a la triangulación del nivel \mathcal{T}^l cuyo soporte está incluido en la clausura de Ω_i^l . Denotamos además $V_1^1 := V^1$. Por tanto

$$V = V^L = \sum_{l=1}^L V^l = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_l} V_i^l.$$

En esta situación ya podemos definir métodos de Schwarz aditivos y multiplicativos. Consideremos los operadores de a -proyección

$$P^l : V \rightarrow V^l,$$

$$P_i^l : V \rightarrow V_i^l.$$

El método aditivo consiste en pasar del problema discreto en elementos finitos (en el nivel más fino, $V = V^L$),

$$\begin{cases} u \in V, \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

³en la distancia anterior no contamos las zonas de frontera de ninguno de los triángulos que pertenecen a la frontera de Ω

a una ecuación en el operador

$$P := \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_l} P_i^l,$$

de la forma

$$PU = F_a.$$

El término independiente se calcula resolviendo los problemas discretos

$$\begin{cases} f_i^l \in V_i^l, \\ a(f_i^l, \varphi) = f(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_i^l, \end{cases}$$

y tomando

$$F_a := \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_l} f_i^l.$$

Una vez planteado el sistema lineal $PU = F_a$, se plantea su resolución por el método de gradiente conjugado (respecto del producto escalar $a(\cdot, \cdot)$), como siempre), lo que vuelve a requerir resolver problemas en los subespacios V_i^l . Nótese que la dimensión de subespacio V_i^l es del orden $(h_{l-1}/h_l)^2$.

Antes de entrar de lleno en las cotas de los valores propios de P , veremos algunas propiedades y notaciones referidas a los operadores P_l . Denotaremos P^0 al operador nulo sobre V .

Lema 7 Para todo $k \leq l$,

$$P^k P^l = P^l P^k = P^k.$$

Además para todo l, k

$$(P^l - P^{l-1})(P^k - P^{k-1}) = \delta_{k,l}(P^l - P^{l-1}).$$

Demostración. Sea $k \leq l$. Dado $\varphi \in V^k \subset V^l$, se tiene

$$a(P^k P^l u, \varphi) = a(P^l u, \varphi) = a(u, \varphi) = a(P^k u, \varphi).$$

Como $P^k u$ y $P^k P^l u$ pertenecen a V^k entonces son iguales por la definición de la proyección a -ortogonal P^k . Además P^l es la identidad cuando se aplica a elementos de V^l y $P^k u \in V^l$, luego $P^l P^k u = P^k u$.

Para demostrar la segunda igualdad, supongamos primero que $k \leq l$. Entonces aplicando lo anterior

$$\begin{aligned} (P^l - P^{l-1})(P^k - P^{k-1}) &= P^l P^k - P^{l-1} P^k - P^l P^{k-1} + P^{l-1} P^{k-1} = \\ &= P^k - P^{l-1} P^k - P^{k-1} + P^{k-1} = \\ &= (I - P^{l-1})P^k. \end{aligned}$$

Si $k = l$ lo anterior es igual a $P^k - P^{k-1}$. En cambio, si $k \leq l - 1$,

$$P^k - P^{l-1} P^k = P^k - P^k = 0.$$

Queda por demostrar el caso $k > l$, que es inmediato por los mismos razonamientos. \square

Dado $u \in V = V^L$ definimos

$$u^l := (P^l - P^{l-1})u, \quad l = 1, \dots, L.$$

Entonces, aplicando el lema anterior

$$a(u^k, u^l) = 0, \quad k \neq l,$$

ya que los operadores P_j son autoadjuntos respecto del producto escalar a . Por tanto, los vectores $\{u^l\}$ forman una familia a -ortogonal. Además

$$\sum_{l=1}^L u^l = \sum_{l=1}^L (P^l - P^{l-1})u = P^L u - P^0 u = P^L u = u,$$

y en general

$$P^l u = \sum_{k=1}^l u^k, \quad l = 2, \dots, L.$$

Por tanto

$$a(u, u) = \sum_{l=1}^L a(u^l, u^l).$$

Lema 8 *Supongamos que la solución del problema continuo es $H^2(\Omega)$ -regular^A. Entonces existe una constante tal que*

$$\|u - P^l u\|_{0,\Omega} \leq Ch_l |u|_{l,\Omega}.$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración. La haremos por la técnica de Aubin-Nitsche. Nótese que por hipótesis el problema es autoadjunto, es decir, $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, luego la $H^2(\Omega)$ -regularidad se exige en el problema original y no en el traspuesto, que es el mismo. Para cada $g \in L^2(\Omega)$ denotamos Lg a la solución de

$$\begin{cases} Lg \in H_0^1(\Omega), \\ a(Lg, v) = (g, v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

que por hipótesis está además en $H^2(\Omega)$.

Entonces

$$\|u - P^l u\|_{0,\Omega} = \sup_{0 \neq g \in L^2} \frac{(u - P^l u, g)_{0,\Omega}}{\|g\|_{0,\Omega}} = \sup_{0 \neq g \in L^2} \frac{a(u - P^l u, Lg)}{\|g\|_{0,\Omega}}.$$

^Aes decir, para todo término independiente en $L^2(\Omega)$, la solución del problema continuo está en $H^2(\Omega)$; esto se puede asegurar bajo ciertas hipótesis sobre la regularidad de los coeficientes y la convexidad del dominio, ver Grisvard [12]

Como para todo $v^l \in V^l$

$$a(v^l, u - P^l u) = 0,$$

entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} a(u - P^l u, Lg) &= a(u - P^l u, Lg - v^l) \leq \\ &\leq a(Lg - v^l, Lg - v^l)^{\frac{1}{2}} a(u - P^l u, u - P^l u)^{\frac{1}{2}} \leq C |Lg - v^l|_{1,\Omega} |u|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

aplicando la continuidad $H^1(\Omega)$ de la a -proyección y la equivalencia de norma y semi-norma en $H_0^1(\Omega)$. Tomando v^l igual al interpolado de Lg en V^l y por los resultados de interpolación en espacios de Sobolev

$$a(u - P^l u, Lg) \leq Ch_l \|g\|_{0,\Omega} |u|_{1,\Omega}$$

para todo $g \in L^2(\Omega)$.

En consecuencia, dividiendo por la norma de g y tomando el supremo,

$$\|u - P^l u\|_{0,\Omega} \leq Ch_l |u|_{1,\Omega}.$$

□

Teorema 3 *Supongamos que la solución del problema continuo es $H^2(\Omega)$ -regular. Entonces, existe C_0 , independiente de L y de los h_l tal que*

$$a(Pu, u) \geq C_0 a(u, u)$$

para todo $u \in V = V^L$.

Demostración. El teorema es cierto si probamos que para cada u existe una descomposición

$$u = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_l} u_i^l, \quad u_i^l \in V_i^l$$

tal que

$$\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_l} a(u_i^l, u_i^l) \leq C_0 a(u, u),$$

sin más que aplicar el Lema 1 de la teoría abstracta. Consideramos los elementos u^l definidos anteriormente y la partición de la unidad $\{\theta_i^l\}$ asociada al recubrimiento del nivel l . Entonces, sean

$$u_i^l := I^l(\theta_i^l u^l) \in V_i^l,$$

siendo I^l la interpolación en V^l . Como se cumple

$$\sum_{i=1}^{M_l} u_i^l = \sum_{i=1}^{M_l} I^l(\theta_i^l u^l) = I^l\left(\sum_{i=1}^{M_l} \theta_i^l u^l\right) = I^l u^l = u^l,$$

entonces

$$\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_l} u_i^l = u.$$

Como

$$u^l = (P^l - P^{l-1})u = (P^l - P^{l-1})^2u = (P^l - P^{l-1})u^l = (I - P^{l-1})u^l,$$

se tiene que

$$\|u^l\|_{0,\Omega} = \|(I - P^{l-1})u^l\|_{0,\Omega} \leq Ch_{l-1}|u^l|_{1,\Omega}, \quad (5)$$

por el Lema 8. Por otra parte, con argumentos similares a los de la demostración del Teorema 2 de la Sección 3 (nótese el paralelismo entre las definiciones de w_i y u_i^l y que ahora el solapamiento δ es del orden de h_{l-1}), se prueba que

$$a(u_i^l, u_i^l) \leq C|I^l(\theta_i^l u^l)|_{1,\Omega_i^l}^2 \leq C \left(|u^l|_{1,\Omega_i^l}^2 + \frac{1}{h_{l-1}^2} \|u^l\|_{0,\Omega_i^l}^2 \right).$$

Denotando por N_c^l al número de colores en el nivel l (ver nota final de la sección 3) y N_c al máximo de los números de colores para todos los niveles, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M_l} a(u_i^l, u_i^l) &\leq CN_c^l \left(|u^l|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{h_{l-1}^2} \|u^l\|_{0,\Omega}^2 \right) \leq \\ &\leq C' N_c |u^l|_{1,\Omega}^2 \leq \\ &\leq C'' N_c a(u^l, u^l), \end{aligned}$$

por la desigualdad (5). Sumando en l

$$\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_l} a(u_i^l, u_i^l) \leq CN_c \sum_{l=1}^L a(u^l, u^l) = CN_c a(u, u),$$

por la a -ortogonalidad de los u^l . □

Nota La $H^2(\Omega)$ -regularidad del problema puede ser eliminada de las hipótesis mediante una demostración más compleja (ver Zhang [22]).

El Teorema 3 nos da una cota inferior para los valores propios de P , uniforme respecto del número de niveles y de los tamaños de las particiones. Seguidamente buscaremos cotas superiores para los valores propios. Antes, es necesario ‘reordenar’ los operadores de proyección, agrupando en cada nivel subdominios que sean disjuntos, mediante un algoritmo de coloración. Denotaremos N_c^l al número de colores obtenido en el nivel l . Cada color en este nivel tiene asignado un índice $s \in \{1, \dots, N_c^l\}$. Entonces, Λ_s^l denotará al conjunto de índices de los subdominios Ω_i^l que son del color s . Por tanto, la unión

$$\bigcup_{i \in \Lambda_s^l} \Omega_i^l,$$

es disjunta y, en consecuencia,

$$V_{\Lambda_s}^l := \sum_{i \in \Lambda_s^l} V_i^l = \bigoplus_{i \in \Lambda_s^l} V_i^l.$$

El espacio $V_{\Lambda_s}^l$ está compuesto por los elementos finitos del nivel l cuyo soporte está contenido en la clausura de la unión de los Ω_i^l cuyo color es s . Definimos la a -proyección sobre $V_{\Lambda_s}^l$, que cumple

$$P_{\Lambda_s}^l = \bigoplus_{i \in \Lambda_s^l} P_i^l,$$

donde la suma directa de los operadores de proyección refleja que la composición de dos elementos distintos de la suma es nula.

Lema 9 Sean $k \leq l$. Entonces para todo $u^k \in V^k$,

$$a(P_{\Lambda_s}^l u^k, u^k)^{\frac{1}{2}} \leq r_{k,l} a(u^k, u^k)^{\frac{1}{2}},$$

donde los coeficientes $r_{k,l}$ cumplen

$$\begin{aligned} r_{k,k} &\leq 1, \\ r_{k,k+1} &\leq 1, \\ r_{k,l} &\leq C(\sqrt{\gamma})^{l-k-1}, \quad l-1 > k, \end{aligned}$$

siendo γ el coeficiente que aparece en las hipótesis iniciales.

Demostración. La haremos para el caso particular de que la matriz A del operador diferencial sea constante, para el caso general ver Bramble y Pasciak [2]. La demostración es trivial para $l = k$ y $l = k + 1$, pues $P_{\Lambda_s}^l$ es una proyección. Cuando $l - 1 > k$, descomponemos

$$\Lambda_s^l = \Lambda_I^l \cup \Lambda_B^l,$$

donde: $i \in \Lambda_I^l$ si Ω_i^l está contenido en algún triángulo τ_j^k ; $i \in \Lambda_B^l$ si Ω_i^l tiene intersección no vacía con la frontera de algún τ_j^k . Por tanto, la unión es disjunta y, de nuevo, $P_{\Lambda_s}^l = P_{\Lambda_I}^l \oplus P_{\Lambda_B}^l$, luego

$$a(P_{\Lambda_s}^l u^k, u^k) = a(P_{\Lambda_I}^l u^k, u^k) + a(P_{\Lambda_B}^l u^k, u^k).$$

Sean $i \in \Lambda_I$ y τ_j^k un triángulo que contenga a Ω_i^l . Entonces, dado $v \in V^l \cap H_0^1(\Omega_i^l) = V_i^l$,

$$a(u^k, v) = \int_{\tau_j^k} \nabla v^t A \nabla u^k d\mathbf{x} = 0,$$

por la fórmula de Green, ya que $u^k \in P_1$ en τ_j^k . Por tanto, para todo $i \in \Lambda_I^l$,

$$a(P_i^l u^k, u^k) = 0,$$

y como la unión de estos subdominios es disjunta,

$$a(P_{\Lambda_I}^l u^k, u^k) = 0.$$

Sea

$$S := \bigcup_{i \in \Lambda_B} \Omega_i^l,$$

de nuevo unión disjunta. Denotamos $a_S(\cdot, \cdot)$ a la restricción de $a(\cdot, \cdot)$ al dominio S . Entonces

$$a(P_{\Lambda_s}^l u^k, u^k) = a_S(P_{\Lambda_B}^l u^k, u^k) \leq a_S(u^k, u^k) \leq C|u^k|_{1,S}^2.$$

Sea $\tau_j^k \in \mathcal{T}^k$. Entonces

$$\int_{S \cap \tau_j^k} |\nabla u^k|^2 d\mathbf{x} = \frac{\text{med}(S \cap \tau_j^k)}{\text{med}(\tau_j^k)} \int_{\tau_j^k} |\nabla u^k|^2 d\mathbf{x},$$

ya que $u^k \in P_1$ en τ_j^k . Por tanto,

$$|u^k|_{1, S \cap \tau_j^k}^2 = \frac{1}{\text{med}(\tau_j^k)} |u^k|_{1, \tau_j^k}^2 \sum_{i \in \Lambda_B} \text{med}(\Omega_i^l \cap \tau_j^k),$$

y como

$$\sum_{i \in \Lambda_B} \text{med}(\Omega_i^l \cap \tau_j^k) \leq C \frac{h_k}{h_{l-1}} \text{med}(\Omega_i^l),$$

puesto que el número de subdominios del tipo Λ_B que intersecan a τ_j^k (recuérdese que son disjuntos dos a dos) es del orden h_k/h_{l-1} , entonces

$$\begin{aligned} |u^k|_{1, S \cap \tau_j^k}^2 &\leq C \frac{\text{med}(\Omega_i^l)}{\text{med}(\tau_j^k)} \frac{h_k}{h_{l-1}} |u^k|_{1, \tau_j^k}^2 \leq C \\ &\leq \frac{h_{l-1}}{h_k} |u^k|_{1, \tau_j^k}^2 \\ &\leq C \gamma^{l-k-1} |u^k|_{1, \tau_j^k}^2, \end{aligned}$$

aplicando primero que $\text{med}(\Omega_i^l) \approx \mathcal{O}(h_{l-1}^2)$ y $\text{med}(\tau_j^k) \approx \mathcal{O}(h_k^2)$ y después la hipótesis dada al inicio de la sección. Por último, sumando en j ,

$$a(P_{\Lambda_s}^l u^k, u^k) \leq C|u^k|_{1,S}^2 \leq C \sum_j |u^k|_{1, S \cap \tau_j^k}^2 \leq C \gamma^{l-k-1} |u^k|_{1,\Omega}^2 \leq C \gamma^{l-k-1} a(u^k, u^k),$$

luego tomando la raíz cuadrada a ambos lados se obtiene el resultado. \square

Para finalizar damos la cota superior para los valores propios, que depende únicamente del máximo de número de colores en todos los niveles y de la constante γ que fija la uniformidad en el refinamiento de triangulaciones entre niveles consecutivos.

Teorema 4 *Existe C constante tal que*

$$a(Pu, u) \leq Ca(u, u),$$

para todo $u \in V = V^L$.

Demostración. Dado un conjunto de subdominios del nivel l al que hemos asignado el color de índice s ,

$$a(P_{\Lambda_s}^l u, P_{\Lambda_s}^l u) = a(P_{\Lambda_s}^l P^l u, P_{\Lambda_s}^l P^l u),$$

ya que $V_{\Lambda_s}^l \subset V^l$. Como

$$P^l u = \sum_{k=1}^l u^k = \sum_{k=1}^l (P^k - P^{k-1})u,$$

se tiene por lo anterior que

$$\begin{aligned} a(P_{\Lambda_s}^l u, P_{\Lambda_s}^l u) &= \sum_{j,k=1}^l a(P_{\Lambda_s}^l u^j, P_{\Lambda_s}^l u^k) \leq \\ &\leq \sum_{j,k=1}^l a(P_{\Lambda_s}^l u^j, P_{\Lambda_s}^l u^j)^{\frac{1}{2}} a(P_{\Lambda_s}^l u^k, P_{\Lambda_s}^l u^k)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^l a(P_{\Lambda_s}^l u^j, P_{\Lambda_s}^l u^j)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \\ &= \left(\sum_{j=1}^l a(P_{\Lambda_s}^l u^j, u^j)^{\frac{1}{2}} \right)^2, \end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y que $P_{\Lambda_s}^l$ es una proyección. Por el Lema 8,

$$\left(\sum_{j=1}^l a(P_{\Lambda_s}^l u^j, u^j)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^l r_{j,l} a(u^j, u^j)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \sum_{j=1}^l r_{j,l} \sum_{j=1}^l r_{j,l} a(u^j, u^j),$$

utilizando de nuevo la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esta vez respecto del producto euclídeo de \mathbb{R}^l . Notemos que

$$\sum_{j=1}^l r_{j,l} \leq 2 + \sum_{j=1}^{l-2} C(\sqrt{\gamma})^{l-j-1} = 2 + C \sum_{k=1}^{l-2} (\sqrt{\gamma})^k \leq \frac{C}{1 - \sqrt{\gamma}},$$

luego reuniendo lo anterior hemos demostrado que

$$a(P_{\Lambda_s}^l u, P_{\Lambda_s}^l u) \leq \frac{C}{1 - \sqrt{\gamma}} \sum_{j=1}^l r_{j,l} a(u^j, u^j).$$

Sumando en todos los subdominios del nivel l (que pueden reagruparse según el algoritmo de coloración en N_c^l dominios),

$$\sum_{i=1}^{M_l} a(P_i^l u, u) = \sum_{s=1}^{N_c^l} a(P_{\Lambda_s}^l u, u) \leq \frac{C N_c^l}{1 - \sqrt{\gamma}} \sum_{j=1}^l r_{j,l} a(u^j, u^j).$$

Por último, sumando en todos los niveles (la suma de las proyecciones de todos los subdominios de todos los niveles es el operador P del método aditivo),

$$\begin{aligned}
a(Pu, u) &= \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{M_l} a(P_i^l u, u) \leq \\
&\leq \frac{CN_c}{1 - \sqrt{\gamma}} \sum_{j=1}^l \left(\sum_{l=j}^L r_{j,l} \right) a(u^j, u^j) \leq \\
&\leq N_c \left(\frac{C}{1 - \sqrt{\gamma}} \right)^2 \sum_{j=1}^L a(u^j, u^j)
\end{aligned}$$

y como los u^j son a -ortogonales entre sí y su suma es u , se obtiene el resultado. □

5. Descomposición de dominio sin solapamiento

Volvemos a considerar el problema modelo (ver inicio de la Sección 3) sobre un abierto poligonal Ω del plano. Sea \mathcal{T}_H una triangulación gruesa de Ω . Denotaremos Σ_H al conjunto de los nodos de \mathcal{T}_H y Λ^E al conjunto de los pares de índices (i, j) tales que los nodos \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j son vecinos en \mathcal{T}_H pero que $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\} \not\subset \partial\Omega$, es decir, al menos uno de los nodos no está en la frontera.

Dados Ω_i, Ω_j , interiores de triángulos de \mathcal{T}_H con un lado común (luego $(i, j) \in \Lambda^E$), denotamos $\Gamma_{i,j}$ al segmento abierto cuya clausura es el lado común. Además

$$\Omega_{i,j} := \Omega_i \cup \Gamma_{i,j} \cup \Omega_j.$$

Con estas notaciones, $\{\Omega_{i,j} : (i, j) \in \Lambda^E\}$ es un recubrimiento de $\Omega \setminus \Sigma^H$.

Sea \mathcal{T}_h una nueva triangulación regular, obtenida por refinamiento de \mathcal{T}_H . Denotamos, como siempre

$$V_h := \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_T \in P^1, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

al espacio de elementos finitos asociado a la triangulación. Los subespacios de elementos finitos cuyas funciones tienen soporte en la clausura de $\Omega_{i,j}$ son denotados

$$V_{i,j} := V_h \cap H_0^1(\Omega_{i,j})$$

Entonces

$$V_h = \sum_{(i,j) \in \Lambda^E} V_{i,j} + V_H,$$

siendo V_H el espacio de elementos finitos correspondiente a la triangulación gruesa. Nótese que las funciones de todos los $V_{i,j}$ se anulan en todos los nodos de \mathcal{T}_H , luego hay que añadir V_H para completar el espacio de elementos finitos.

Se puede ver fácilmente que a lo sumo se necesitan tres colores para clasificar los elementos del conjunto $\{\Omega_{i,j} : (i, j) \in \Lambda^E\}$ como en el capítulo 3. Teniendo en cuenta el espacio global V_H resulta que 4 es una cota superior de los valores propios del operador del método aditivo. La cota inferior la da el siguiente resultado.

Teorema 5 *Existe C independiente de H y h tal que todo $u \in V_h$ admite una descomposición*

$$u = u_H + \sum_{(i,j) \in \Lambda^E} u_{i,j}, \quad u_H \in V_H, u_{i,j} \in V_{i,j},$$

tal que

$$a(u_H, u_H) + \sum_{(i,j) \in \Lambda^E} a(u_{i,j}, u_{i,j}) \leq C \left(1 + \log \frac{H}{h}\right)^2 a(u, u).$$

En el apartado siguiente daremos una idea de los pasos intermedios que conducen a la demostración del resultado, para esbozar ésta seguidamente. Nótese que en este caso la constante C_0 depende de H y h . En el caso particular

$$h = \frac{H}{2^k},$$

es decir, cuando la triangulación fina se obtiene por subdivisiones sucesivas de la gruesa, la constante es equivalente a una constante multiplicada por k , el número de particiones.

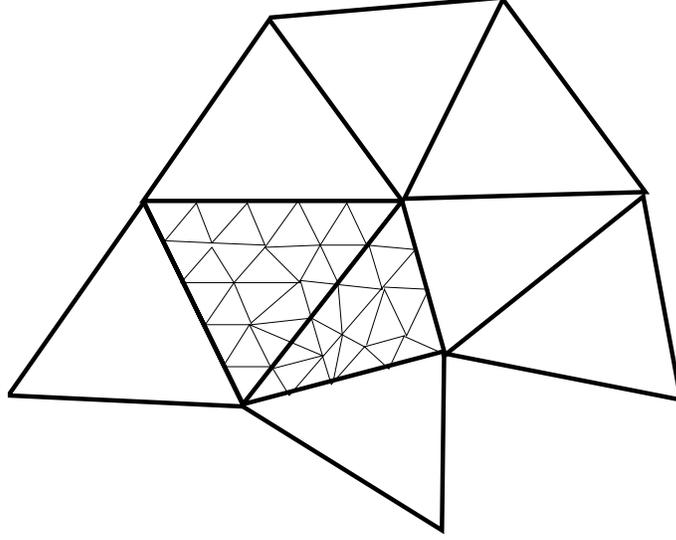


Figura 5: Método sin solapamiento: los problemas discretos se resuelven en el mallado grueso y en el mallado fino restringido a cada par de triángulos contiguos

5.1. Algunos resultados

La idea básica de la demostración requiere, como en la Sección 3, escoger primero un elemento del espacio V_H . Aquí estamos obligados de tomar

$$u_H := I_H u,$$

el interpolado de u en V_H . Lo que explica que la constante C_0 no sea acotada en h y H .

Vamos a introducir primero unas notaciones. Definimos unas nuevas normas en cada subdominio Ω_i :

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\Omega_i}^2 &:= \frac{1}{H^2} \|u\|_{0,\Omega_i}^2 + |u|_{1,\Omega_i}^2, \\ \|\varphi\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega_i}^2 &:= \frac{1}{H} \|\varphi\|_{0,\partial\Omega_i}^2 + |\varphi|_{\frac{1}{2},\partial\Omega_i}^2, \end{aligned}$$

siendo

$$|\varphi|_{\frac{1}{2},\partial\Omega_i}^2 := \int_{\partial\Omega_i} \int_{\partial\Omega_i} \frac{|\varphi(s) - \varphi(t)|^2}{|s - t|^2} ds dt.$$

Por tanto, las nuevas normas, equivalentes a las habituales, incorporan en su definición el tamaño del conjunto: la medida de Ω_i es del orden de H^2 por la regularidad de la triangulación y la medida unidimensional de su frontera es $\mathcal{O}(H)$. En Ω , cuya medida no importa, tomamos las definiciones habituales.

Nota Estas definiciones se trasladan a la posibilidad de obtener una cota uniforme en el teorema de trazas y la desigualdad de Poincaré. Tomando un elemento de referencia $\hat{\Omega}$, de forma que $\text{diám}(\hat{\Omega}) = \mathcal{O}(1)$, por ser fijo, tenemos por el teorema de traza

$$\|\hat{\gamma}u\|_{\frac{1}{2},\partial\hat{\Omega}}^2 \leq \hat{C} \|u\|_{1,\hat{\Omega}}^2.$$

Aplicando un cambio de variable en todas las integrales se deduce que

$$\frac{1}{H} \|\gamma u\|_{0,\partial\Omega_i}^2 + |\gamma u|_{\frac{1}{2},\partial\Omega_i}^2 \leq \hat{C}' \left(\frac{1}{H^2} \|u\|_{0,\Omega_i}^2 + |u|_{1,\Omega_i}^2 \right),$$

luego el teorema de traza se satisface con cota independiente de H en las normas escaladas del dominio Ω_i y de su frontera.

Dado Γ , lado de Ω_i , definimos

$$H_{oo}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \tilde{v} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)\},$$

siendo \tilde{v} la extensión por cero de v al resto de la frontera. En particular, si $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ es continua en el segmento cerrado, φ debe anularse en los extremos. Nótese que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, donde este último es la clausura de $\mathcal{D}(\Gamma)$, pero que $H_{oo}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ es un subespacio propio de ambos.

Dada $\varphi \in H_{oo}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, se define la norma

$$\|\varphi\|_{H_{oo}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 := |\varphi|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 + \int_0^{l(\Gamma)} \left(\frac{\varphi(\mathbf{x}(s))^2}{s} + \frac{\varphi(\mathbf{x}(s))^2}{l(\Gamma) - s} \right) ds,$$

donde $l(\Gamma)$ es la longitud del lado Γ y \mathbf{x} la parametrización arco del mismo. Esta norma surge de considerar la norma $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$ de la extensión por cero $\tilde{\varphi}$. De hecho

$$\|\varphi\|_{H_{oo}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \simeq \|\tilde{\varphi}\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega_i}$$

Consideremos el operador elíptico habitual

$$A := -\operatorname{div}(A(\mathbf{x})\nabla \cdot).$$

Dado $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$ se denomina levantamiento A -armónico o extensión A -armónica de φ a la única solución $w \in H^1(\Omega_i)$ de

$$\begin{cases} Aw = 0, & \text{en } \Omega_i, \\ u|_{\partial\Omega_i} = \varphi. \end{cases}$$

La extensión A -armónica está bien definida por el teorema de Lax-Milgram y cumple

$$C^* \|\varphi\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega_i} \leq \|w\|_{1,\Omega_i} \leq C \|\varphi\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega_i}.$$

Si $\varphi \in H_{oo}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ y tomamos w el levantamiento A -armónico de $\tilde{\varphi}$, se tiene, por lo anterior,

$$C^* \|\varphi\|_{H_{oo}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \|w\|_{1,\Omega_i} \leq C \|\varphi\|_{H_{oo}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

La versión discreta del levantamiento A -armónico de funciones definidas en un lado es inmediata. Consideramos el conjunto

$$\Phi_{i,j} := \{v|_{\Gamma_{i,j}} : v \in V_h\},$$

de restricciones al lado $\Gamma_{i,j}$ de elementos de V_h . Entonces el conjunto

$$\Phi_{i,j} \cap H_0^1(\Gamma_{i,j}) = \{\varphi \in \Phi_{i,j} : \varphi = 0 \text{ en los extremos de } \Gamma_{i,j}\} \subset H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{i,j})$$

está compuesto de funciones del espacio discreto asociado al lado $\Gamma_{i,j}$ que admiten extensión por cero a las fronteras de Ω_i y Ω_j que esté en el espacio $H^{\frac{1}{2}}$ correspondiente. Denotando

$$V_h(\Omega_i) := \{v \in \partial\Omega_i : v \in V_h\},$$

dado $\varphi \in \Phi_{i,j} \cap H_0^1(\Gamma_{i,j})$ se define $R_{\Gamma_{i,j}}^i \varphi \in V_h(\Omega_i)$ como la única solución del problema discreto

$$\begin{cases} R_{\Gamma_{i,j}}^i \varphi \in V_h(\Omega_i), \\ a(R_{\Gamma_{i,j}}^i \varphi, \phi) = 0, & \forall \phi \in H_0^1(\Omega_i) \cap V_h(\Omega_i), \\ R_{\Gamma_{i,j}}^i \varphi|_{\partial\Omega_i} = \tilde{\varphi}, \end{cases}$$

siendo $\tilde{\varphi}$ la extensión por cero a la frontera de $\partial\Omega_i$. El operador $R_{\Gamma_{i,j}}^i$ es una versión en elementos finitos del levantamiento A -armónico. Además es inmediato ver que si $\varphi \in \Phi_{i,j} \cap H_0^1(\Gamma_{i,j})$, la función definida sobre $\Omega_{i,j}$ a través de los levantamientos discretos respectivos en Ω_i y Ω_j está en $V_{i,j}$.

El levantamiento discreto vuelve a dar cotas independientes de los parámetros de la discretización; ver Bramble et al. [3] para la demostración del siguiente resultado:

Lema 10 *Existen C_1, C_2 independientes de h y H tales que*

$$C_2 \|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{i,j})}^2 \leq \|R_{\Gamma_{i,j}}^i \varphi\|_{1,\Omega_i}^2 \leq C_1 \|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{i,j})}^2$$

para todo $\varphi \in \Phi_{i,j} \cap H_0^1(\Gamma_{i,j})$.

Un paso más consiste en dar una cota para la V_H -interpolación de funciones de V_h .

Lema 11 *Existe $C > 0$ tal que*

$$|I_H v|_{1,\Omega_i}^2 \leq C \left(1 + \log \frac{H}{h}\right) |v|_{1,\Omega_i},$$

para todo $v \in V_h(\Omega_i)$.

Demostración. Se basa simplemente en la aplicación de una desigualdad de Sobolev discreta

$$\|w\|_{\infty,\Omega_i}^2 \leq C \left(\frac{1}{H^2} \|w\|_{0,\Omega_i}^2 + \log \frac{H}{h} |w|_{1,\Omega_i}^2 \right),$$

válida para funciones de $V_h(\Omega_i)$. Se puede encontrar más detalles en Bramble et al. [4]. \square

5.2. Demostración del Teorema

Ya estamos en condiciones de dar la descomposición del Teorema 5. Dada $u \in V_h$ consideramos $u_H := I_H u$ y denotamos

$$w := u - u_H = u - I_H u.$$

Entonces $w \in V_h$ se anula en los nodos de la triangulación gruesa, luego su restricción a un lado $\Gamma_{i,j}$ está en $\Phi_{i,j} \cap H_0^1(\Gamma_{i,j})$. Además, denotando $\varphi = w|_{\Gamma_{i,j}}$ se cumple que

$$\|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{i,j})}^2 \leq C \left(1 + \log \frac{H}{h}\right)^2 |u|_{1,\Omega_i}^2,$$

como se puede comprobar aplicando el teorema de traza y cálculos directos sobre la definición de la norma de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{i,j})$ (ver Bramble et al.[4]).

Para definir los restantes elementos de la descomposición del teorema se sigue un proceso sencillo. Denotamos α_k al inverso del número de lados interiores del dominio Ω_k , $P_i : V_h \rightarrow V_h \cap H_0^1(\Omega_i)$ a la a -proyección y

$$P_{i,j} := P_i + P_j, \quad (i,j) \in \Lambda^E,$$

donde, como habitualmente, consideramos las proyecciones de los elementos extendidas por cero al resto del dominio. Nótese que la suma de los operadores es directa y que $P_{i,j}v \in V_{i,j}$ se anula en $\Gamma_{i,j}$ para todo $v \in V_h$. Denotamos $P_{i,j}^\perp$ al operador a -ortogonal de $P_{i,j}$ en $V_{i,j}$. Por último, aplicamos a $w = u - u_H$ ambos operadores

$$w_{i,j} := (\alpha_i P_i \oplus \alpha_j P_j \oplus P_{i,j}^\perp)w \in V_{i,j},$$

entendiéndose esta función con su extensión por cero al resto de Ω .

Se puede ver que $P_{i,j}^\perp w$ es precisamente la función de $V_{i,j}$ obtenida como levantamiento discreto en Ω_i y Ω_j a partir de la restricción de w a $\Gamma_{i,j}$ (nótese que w se anula en los extremos de $\Gamma_{i,j}$ por ser éstos nodos de la triangulación gruesa).

Además

$$w = \sum_{(i,j) \in \Lambda^E} w_{i,j}$$

y para todo $(i,j) \in \Lambda^E$,

$$a(w_{i,j}, w_{i,j}) \leq \alpha_i^2 a_i(w, w) + \alpha_j^2 a_j(w, w) + a(P_{i,j}^\perp w, P_{i,j}^\perp w),$$

donde $a_i(\cdot, \cdot)$ denota a la forma bilineal definida como a con integración sobre el subdominio Ω_i . Por tanto, como por los resultados intermedios

$$a(P_{i,j}^\perp w, P_{i,j}^\perp w) \leq C \|w\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{i,j})}^2 \leq C \left(1 + \log \frac{H}{h}\right)^2 |u|_{1,\Omega_i}^2,$$

se tienen las cotas del teorema para los términos $w_{i,j}$. La cota para u_H proviene del teorema dado sobre la interpolación en V_H de elementos de V_h .

Referencias

- [1] J.H. Bramble, *Multigrid Methods*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman 1993.
- [2] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, *New estimates for multigrid algorithms including the V-cycle*. Math. Comp. **60** (1993), 447-471.
- [3] J.H. Bramble, J.E. Pasciak and A.H. Schatz, *The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring, I*. Math. Comput. **47** (1986) 103-134.
- [4] J.H. Bramble, J.E. Pasciak and A.H. Schatz, *An iterative method for elliptic problems on regions partitioned into substructures*. Math. Comput. **46** (1986), 361-369.
- [5] J.H. Bramble, J.E. Pasciak and A.H. Schatz, *The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring, IV*. Math. Comput. **55**, (1989) 1-22.
- [6] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, J. Wang, J. Xu. *Convergence estimates for product iterative methods with applications to domain decomposition*. Math. Comp. **57** (1991), 1-21.
- [7] T.F. Chan and T.P. Mathew. *Domain decomposition algorithms*. Acta Numerica (1994), 61-143.
- [8] X.-C. Cai and O. Widlund, *Multiplicative Schwarz algorithms for some nonsymmetric and indefinite problems*, SIAM J. Numer. Anal. **30** (1993), 936-952.
- [9] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, New York, 1978.
- [10] M. Dryja, O. B. Widlund. *Some domain decomposition algorithms for elliptic problems*. Technical Report 438, Courant Institute of Mathematical Sciences, April 1989.
- [11] M. Dryja, O. B. Widlund. *Towards a unified theory of domain decomposition algorithms for elliptic problems*. In Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, T. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, and O. Widlund, editors, SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
- [12] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, Boston, 1985.
- [13] P. Le Tallec. *Domain decomposition methods in computational mechanics*. Computational Mechanics Advances-Vol. 1, No.2 (1994), 121-220.
- [14] P. L. Lions. *On the Schwarz alternating method*. Proc. First Internat. Sympos. on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (R. Glowinski, G. H. Golub, G. A. Meurant, J. Periaux, eds.), SIAM, Philadelphia, PA; 1989, 81-92.
- [15] J.-L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications* (Dunod 1968).

- [16] S. Meddahi. *Schwarz algorithms for the Raviart-Thomas mixed Method*. To appear in *Calcolo*.
- [17] J. Nečas, *Les Méthodes Directes En Théorie des Équations Elliptiques*. Academia, Prague, 1967.
- [18] S.V. Nepomnyaschikh. *Domain Decomposition and Schwarz methods in a subspace for the approximate solution of elliptic boundary value problems*, Ph. D. thesis, Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, Novosibirsk, USSR, 1986.
- [19] H.A. Schwarz. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Springer, Berlin, 1890.
- [20] O.B. Widlund, Iterative substructuring methods: algorithms and theory for elliptic problems in the plane. In: R. Glowinski, G.H. Golub, G.A. Meurant, J. Periaux, ed., *First international symposium on domain decomposition methods*, (SIAM, Philadelphia, 1988) 113-128.
- [21] J. Xu, *Iterative methods by space decomposition and subspace correction*. Technical report, Penn State University, University Park, PA, 1990. To appear in *SIAM Review*.
- [22] X. Zhang, *Multilevel Schwarz methods*. *Num. Math.* **63**, 521-539.