

Métodos de Elementos de Contorno
Escuela Hispano–Francesa sobre
Simulación numérica en física e ingeniería
Laredo, Septiembre de 2000

FRANCISCO JAVIER SAYAS — RICARDO CELORRIO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

(1) Centro Politécnico Superior, c/ María de Luna, 3. 50015 Zaragoza

(2) E.U.I.T.I.Z., c/ Corona de Aragón, s/n. 50009 Zaragoza

`{jsayas,celorrio}@posta.unizar.es`

Índice General

Introducción	4
1 Métodos directos y ecuaciones de segundo tipo	7
1.1 Fórmulas de representación	7
1.2 Problemas de contorno y ecuaciones integrales	9
1.3 Teoría y numérico de ecuaciones de segundo tipo	12
1.4 Aplicación	15
2 Potenciales y ecuaciones de primer tipo	18
2.1 Potencial de capa simple	18
2.2 Parametrización del problema	21
2.3 Espacios de Sobolev periódicos y operadores logarítmicos	24
2.4 Un método de Galerkin	27
2.5 El sistema asociado	29
2.6 Extensiones fáciles	36
3 Operadores de frontera del laplaciano y métodos de Galerkin	39
3.1 La proyección de Calderón	39
3.2 Formulaciones directas e indirectas	41
3.3 Formas parametrizadas	44
3.4 Métodos de Galerkin	46
3.5 Situación general	47
3.6 Ejemplo	49
3.7 Cuestiones de unicidad	52

4 Ecuación de Helmholtz y métodos de colocación	55
4.1 Solución fundamental y operadores	55
4.2 Un potencial de capa simple y un método de colocación	58
4.3 Discretización completa	62
4.4 Potencial mixto	66
5 Nuevos problemas	71
5.1 Arcos abiertos	71
5.2 Dominios múltiples	74
5.3 Problemas mal puestos	76
5.4 No homogeneidades	78
5.5 Problemas de contorno mixtos	79
6 Elasticidad y ecuaciones singulares	81
6.1 Introducción	81
6.2 Ecuaciones y fórmulas	82
6.3 Operadores de frontera	85
6.4 Ecuaciones integrales singulares	88
7 En el tintero	91
7.1 Otros problemas bidimensionales	91
7.2 El salto a la tercera dimensión	95
Complementos	97
Referencias bibliográficas	103

Introducción

Las páginas que siguen incluyen una visión introductoria de algunos métodos de elementos de contorno. Están pensadas para presentar las ideas básicas de las formulaciones de frontera, de los métodos numéricos asociados y de su análisis.

Detrás del concepto de métodos de contorno hay dos ideas:

*reformular un problema de contorno en forma de ecuación integral
y resolver la ecuación integral resultante.*

Todo ello forma parte de los elementos de contorno, al igual que la formulación variacional es parte integrante de los elementos finitos.

El primer punto no es simple. El punto de vista es el de la frontera del dominio. El usuario se sitúa sobre la misma y,

- o bien establece relaciones entre magnitudes asociadas, relaciones que convierte en ecuaciones de importancia equivalente al problema de contorno,
- o bien propone desde la frontera una posible solución dentro de una subclase de soluciones de la ecuación diferencial y determina qué elemento de la misma cumple las condiciones de contorno.

Ambos enfoques, llamados respectivamente directo e indirecto, comparten una división esencial en dos partes:

*una ecuación integral por resolver
y una fórmula de representación integral de la solución.*

Todo ello debe ser tratado numéricamente, aunque la mayor parte del esfuerzo se concentre en la resolución numérica de la ecuación integral. En todo caso, siempre hay

que tener en cuenta para qué se quiere la solución, lo cual justifica medir los errores en normas débiles que parecerían inaceptables desde un punto de vista tradicional.

La línea argumental de este breve curso se sitúa alrededor de una serie de ejemplos tratados con mayor o menor detalle. En su derredor se desarrollan las ideas de formulaciones de frontera y de su discretización. Cada uno de los ejemplos intenta ilustrar una o más características nuevas que aparecen al tratar los métodos de contorno y en la medida de lo posible intentamos llegar hasta el final, ofreciendo una implementación efectiva. Podemos así pensar no en términos de los capítulos y secciones, sino en cuanto a qué aporta cada nuevo ejemplo:

- Un problema de Dirichlet interior para el laplaciano motiva la introducción de los llamados métodos directos, de los operadores compactos, las ecuaciones integrales de segundo tipo y los métodos de Galerkin para las mismas.
- Un problema de Dirichlet interior–exterior para el laplaciano sirve para introducir el potencial de capa simple, las ecuaciones integrales de primer tipo, los espacios de Sobolev periódicos y los métodos de Galerkin para ecuaciones elípticas periódicas, así como sus discretizaciones completas.
- Con un método indirecto basado en el potencial de capa doble se resuelve un problema de Robin interior. Aquí surgen las ecuaciones hipersingulares y se tratan de nuevo métodos de tipo Galerkin.
- El problema de Dirichlet para la ecuación de Helmholtz sirve de pretexto para introducir los operadores de frontera Helmholtz y repetir lo ya sabido para el laplaciano. Se trata la ecuación logarítmica de primer tipo resultante con un método de colocación y se introduce una discretización completa del mismo.
- Con un potencial mixto se trata el mismo problema asociado a la ecuación de Helmholtz y se discuten las ideas de unicidad. La ecuación resultante es de segundo tipo, con operador logarítmico asociado y se tratan métodos de colocación para las mismas.
- Un rápido repaso a un problema en un arco abierto a uno en el exterior de un dominio múltiple y a un tercero no homogéneo sirven para mostrar las leves

modificaciones necesarias para estas nuevas cuestiones, el cambio de variable del coseno, los sistemas de ecuaciones integrales, etc.

- Por último, el sistema de Lamé bidimensional se emplea para introducir las ecuaciones integrales singulares y su problemática.

La exposición es más bien narrativa, aunque se pretende ordenada. No se enuncian y prueban teoremas, aunque quedan dichas y demostradas bastantes propiedades dentro del contexto. De la misma forma se evitan las referencias bibliográficas dentro del cuerpo del texto. Al final de cada capítulo damos una pequeña relación de qué referencias de entre las listadas en la Bibliografía desarrollan ese tipo de conceptos, aunque no seamos exhaustivos en atribuir a cada autor su obra, sino que pretendamos más bien orientar al lector hacia uno u otro texto.

Tanto el enfoque, como la bibliografía y los temas escogidos están fuertemente influidos por la experiencia personal de los autores en el análisis numérico y aplicación de los elementos de contorno. Por ello, el sesgo está garantizado.

Agradecimientos. Los organizadores de la Escuela Hispano–Francesa me (Javier Sayas) ofrecieron la posibilidad de dar un curso sobre elementos de contorno, circunstancia que agradezco y mucho. Al pensar en redactar un curso acelerado sobre el tema no dudé en contar con Ricardo Celorrio para discutir los ejemplos, la ordenación del material y la presentación. Ambos hemos contado con Víctor Domínguez (el tercer “integral” zaragozano) para varias fructíferas discusiones, así como para revisar el manuscrito. Por último, agradecemos a Francisco Lisbona y al Departamento de Matemática Aplicada de Zaragoza el estimulante ambiente en el que se desarrolla nuestro trabajo y, por ende, estas notas.

Zaragoza, Junio de 2000

Capítulo 1

Métodos directos y ecuaciones de segundo tipo

1.1 Fórmulas de representación

Comenzamos con un resultado clásico de teoría del potencial (ocasionalmente llamado tercera fórmula de Green), cuya demostración no es más que una aplicación cuidadosa de la segunda fórmula de Green y un proceso de paso al límite.

Supongamos que $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ es un abierto conexo y que su frontera Γ es 1-regular a trozos. Denotemos por $\partial_{\mathbf{n}}$ a la derivada normal exterior a Ω . Entonces, si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ y

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

se tiene que para todo $\mathbf{y} \in \Omega$

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x}) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

mientras que si \mathbf{y} es un punto de Γ donde hay tangente,

$$\frac{1}{2} u(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x}) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

La expresión (1.1) se conoce como una **fórmula de representación en la frontera** y da la forma explícita de una función armónica en términos de sus datos de Cauchy:

$$u|_{\Gamma}, \quad \partial_{\mathbf{n}} u|_{\Gamma}.$$

La expresión (1.2) es una **identidad integral sobre Γ** que relaciona ambos datos. Es bien conocido que $u|_{\Gamma}$ determina unívocamente a u , luego a $\partial_{\mathbf{n}}u|_{\Gamma}$, y que, salvo incomodidades con las funciones constantes, el recíproco también es cierto.

Antes de regresar a (1.2) veamos algunos detalles de fácil deducción.

- El caso $u \equiv 1$ tiene dos consecuencias muy simples sobre las fórmulas anteriores.

Por un lado

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega \quad (1.3)$$

y por otro (cuando Γ es \mathcal{C}^1)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}, \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma.$$

Así pues, la función

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\cdot - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x}) : \bar{\Omega} \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

presenta un salto al acercarse a Γ . La fórmula (1.3) tiene además una bien conocida interpretación electrostática: flujo, a través de Γ , del campo eléctrico generado por una carga puntual bidimensional (representada por una delta de Dirac) situada en $\mathbf{y} \in \Omega$.

- La función

$$\int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) \log |\cdot - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x})$$

es continua en $\bar{\Omega}$ por el teorema de la convergencia dominada. Por tanto, comparando (1.1) y (1.2) se deduce que

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \ni \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0 \in \Gamma} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}| d\gamma(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} u(\mathbf{y}_0). \end{aligned}$$

La función

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

es una solución fundamental del laplaciano, es decir, en el sentido de distribuciones en \mathbf{R}^2 , se verifica que

$$\Delta \Phi(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}},$$

siendo $\delta_{\mathbf{y}}$ la distribución delta de Dirac centrada en \mathbf{y} .

1.2 Problemas de contorno y ecuaciones integrales

Consideremos primero el **problema de Dirichlet**. En tal caso,

$$u|_{\Gamma} = \varphi$$

es conocido. Denotemos

$$\partial_{\mathbf{n}}u|_{\Gamma} =: \lambda : \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Así, de (1.2) podemos deducir que en Γ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\cdot - \mathbf{x}| \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\cdot - \mathbf{x}| \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \varphi. \quad (1.4)$$

La expresión (1.4) es una ecuación integral lineal de Fredholm (el dominio de integración es fijo) llamada de primer tipo. Si escribimos

$$V_{\Gamma} \lambda := - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\cdot - \mathbf{x}| \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}$$

y

$$K_{\Gamma} \varphi := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\cdot - \mathbf{x}| \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}$$

podemos condensar (1.4) en la forma

$$V_{\Gamma} \lambda = \frac{1}{2} \varphi - K_{\Gamma} \varphi =: \tilde{\varphi}. \quad (1.5)$$

Si sabemos resolver esta ecuación, la fórmula de representación proporciona la solución del problema de contorno

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad \text{en } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = \varphi. \end{array} \right.$$

Esta estrategia,

1. ecuación integral
2. fórmula de representación,

reduce el problema de contorno en Ω a un problema sobre la frontera Γ . Su realización numérica constituye lo que se conoce por un

MÉTODO DE CONTORNO.

La ecuación integral de frontera asociada al **problema de contorno** con condiciones de **Neumann** aparece inmediatamente al “dar la vuelta” a (1.5)

$$\frac{1}{2}\varphi - K_{\Gamma}\varphi = V_{\Gamma}\lambda. \quad (1.6)$$

De nuevo estamos ante una ecuación integral lineal de Fredholm, pero esta vez es de segundo tipo (formalmente) puesto que la incógnita φ está dentro y fuera del signo integral.

Hasta aquí todo parece carente de problemas y resulta tentador discretizar lo anterior. No obstante, el laplaciano posee una incómoda y característica falta de unicidad ligada a las constantes (similar a la de los movimientos rígidos en las ecuaciones de Navier-Lamé o a los desplazamientos verticales en los problemas de placa de Kirchhoff). Por un lado

$$\Delta u = 0$$

implica que

$$\int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u = 0$$

(esto es el teorema de Gauss), y por otro, el problema

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad \text{en } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} u|_{\Gamma} = 0, \end{array} \right.$$

admite a las constantes (y sólo a las constantes) como soluciones no triviales. Así, en el problema

$$V_{\Gamma}\lambda = \frac{1}{2}\varphi - K_{\Gamma}\varphi$$

habrá que buscar soluciones tales que

$$\int_{\Gamma} \lambda = 0.$$

Por contra, como ya hemos visto,

$$\frac{1}{2} - K_{\Gamma}1 = 0,$$

luego la ecuación

$$\frac{1}{2}\varphi - K_{\Gamma}\varphi = V_{\Gamma}\lambda$$

no va a tener solución única, ya que tiene, al menos por ahora, un núcleo unidimensional.

El problema con condiciones de Fourier (o Robin)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} u|_{\Gamma} + \sigma u|_{\Gamma} = h, & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

conduce a una nueva y algo más complicada ecuación de segundo tipo

$$\frac{1}{2}\varphi - K_{\Gamma}\varphi + V_{\Gamma}(\sigma\varphi) = V_{\Gamma}h,$$

donde $\varphi = u|_{\Gamma}$ es la incógnita.

Apunte. *El espacio natural de las restricciones o trazas sobre Γ de elementos de*

$$\{u \in H^1(\Omega) \mid \Delta u = 0\}$$

es $H^{1/2}(\Gamma)$. *En un subconjunto de su dual,*

$$H_0^{-1/2}(\Gamma) = \{\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma) \mid \langle \lambda, 1 \rangle_{\Gamma} = 0\},$$

están las derivadas normales. Todos los operadores y expresiones se pueden extender a estos espacios, entendiendo algunas integrales como dualidades.

Vamos a centrarnos en la ecuación (1.6). El núcleo del operador K_{Γ} es la función

$$\frac{1}{2\pi} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Notemos que si Γ tiene tangente continua en todos los puntos, la función anterior es continua ya que cuando $\mathbf{x} - \mathbf{y} \rightarrow 0$ se genera un cero doble en el numerador. Por contra, si hay una esquina en algún punto $\mathbf{y} \in \Gamma$, aparece una singularidad que modifica sustancialmente las propiedades del operador K_{Γ} .

Parametrización. Vamos a simplificar la situación suponiendo que Ω es simplemente conexo (luego Γ es una curva simple) y que Γ es muy regular. Supongamos que disponemos de una parametrización regular y 1–periódica de Γ

$$\mathbf{x} : \mathbf{R} \longrightarrow \Gamma \subset \mathbf{R}^2.$$

Estas condiciones se refieren a que

$$|\mathbf{x}'(s)| \neq 0, \quad \mathbf{x}(s) \neq \mathbf{x}(t), \quad \text{si } s - t \notin \mathbf{Z}. \quad (1.7)$$

Cambiando el nombre de la incógnita

$$g(s) := \varphi(\mathbf{x}(s)),$$

la ecuación (1.6) se escribe

$$\frac{1}{2}g(s) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{n}(t)}{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)|^2} |\mathbf{x}'(t)| g(t) dt = V_\Gamma \lambda(\mathbf{x}(s)), \quad (1.8)$$

siendo $\mathbf{n}(t) := \mathbf{n}(\mathbf{x}(t))$ el vector normal en $\mathbf{x}(t)$. Por tanto nos hallamos ante una ecuación de la forma

$$g(s) - \int_0^1 K(s, t) g(t) dt = f(s), \quad (1.9)$$

donde el núcleo $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ es continuo y 1-periódico en ambas variables.

1.3 Teoría y numérico de ecuaciones de segundo tipo

Vamos a estudiar brevemente cómo discretizar la ecuación (1.9) por métodos de tipo Galerkin. Denotemos

$$Kg := \int_0^1 K(\cdot, t) g(t) dt$$

y supongamos que

$$g - Kg = 0 \quad \Rightarrow \quad g \equiv 0,$$

esto es, que $I - K$ es inyectivo. Notemos que la ecuación (1.8) no cumple esta propiedad, defecto menor que trataremos más adelante.

Por teoría de Fredholm (ver Apéndice) se sabe que $I - K : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ define un operador invertible con inverso continuo, ya que K es un operador compacto, esto es, transforma sucesiones débilmente convergentes en fuertemente convergentes. Más aún, como $K(s, t)$ es continua, es obvio que si $f \in \mathcal{C}[0, 1]$, también es continua la solución de

$$g - Kg = f. \quad (1.10)$$

Consideremos los nodos $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_N = 1$ y el conjunto de funciones constantes a trozos

$$S_h := \{g_h : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R} \mid g_h|_{(s_{i-1}, s_i)} \in \mathbb{P}_0, \forall i\}.$$

Un método de Galerkin para (1.10) asociado al espacio S_h consiste en buscar

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} g_h \in S_h, \\ \int_0^1 [g_h(s) - K g_h(s)] r_h(s) ds = \int_0^1 f(s) r_h(s) ds, \quad \forall r_h \in S_h. \end{array} \right.$$

Para aquéllos acostumbrados a las formulaciones variacionales previas a los elementos finitos, hacemos notar que la formulación variacional de (1.10) se limita a un proceso de integración. Como de costumbre, una vez fijada una base del espacio de elementos finitos, (P_h) es equivalente a un sistema de ecuaciones.

Sea $\chi_i : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ la función característica del intervalo (s_{i-1}, s_i) . Entonces

$$g_h = \sum_{i=1}^N g_i \chi_i, \quad \text{con } g_i \in \mathbf{R},$$

ya que $\{\chi_1, \dots, \chi_N\}$ es base de S_h . Así, (P_h) es equivalente al sistema

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_0^1 [\chi_j(s) - K \chi_j(s)] \chi_i(s) ds \right] g_j = \int_0^1 f(s) \chi_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, N,$$

es decir, escribiendo $h_i := s_i - s_{i-1}$

$$h_i g_i - \sum_{j=1}^N \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} K(s, t) ds dt \right] g_j = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s) ds, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.11)$$

Apunte. A pesar de la filosofía “elementos finitos” del espacio S_h y de la base escogida, la matriz del sistema es llena. La parte correspondiente al operador identidad ha quedado en una diagonal, ya que este operador es local. Por el contrario, el operador K no es local (el valor de la función original en una zona influye en el valor de la imagen sobre todo su dominio). Esto se refleja numéricamente en una matriz llena. De aquí extraemos una conclusión importante que hay que tener en mente: las matrices de las discretizaciones de ecuaciones integrales (y los métodos de contorno requieren resolver ecuaciones integrales) **son llenas**.

Es inevitable entrar levemente en el terreno de los operadores compactos y la discretización de ecuaciones de segundo tipo. La forma bilineal trivial asociada a la identidad es obviamente elíptica. Así los métodos de Galerkin asociados al operador identidad (¡la proyección ortogonal sobre el espacio discreto!) son siempre estables. Además para toda $f \in L^2(0, 1)$

$$\inf_{f_h \in S_h} \|f - f_h\|_{L^2} \rightarrow 0$$

cuando $h := \max |h_i| \rightarrow 0$, luego la estabilidad se conserva frente a perturbaciones compactas que no hagan perder la invertibilidad. Por tanto, como K es un operador compacto,

1. el problema (P_h) tiene solución única, al menos para h suficientemente pequeño,
2. el método es L^2 -estable, esto es,

$$\|g_h\|_{L^2} \leq C\|g\|_{L^2}, \quad \forall g \in L^2(0, 1),$$

3. se cumple una estimación de Céa

$$\|g - g_h\|_{L^2} \leq C' \inf_{r_h \in S_h} \|g - r_h\|_{L^2}$$

4. y, cuando $h \rightarrow 0$, se obtiene convergencia en L^2 .

Los puntos segundo y tercero son esencialmente equivalentes. De la estimación de Céa se obtiene además la posibilidad de estudiar órdenes de convergencia cuando la solución es regular. En concreto, si

$$g \in H^1 := \{g \in H^1(0, 1) \mid g(0) = g(1)\}$$

(ponemos la periodicidad para no olvidar que nuestros problemas proceden de curvas cerradas y son periódicos) se llega a

$$\|g - g_h\|_{L^2} \leq Ch\|g\|_{H^1}, \tag{1.12}$$

que es el orden óptimo en esta norma y en este espacio discreto.

Podemos obtener fácilmente cotas en L^∞ para la convergencia. Denotemos primero

$$z_i := \frac{s_{i-1} + s_i}{2}$$

a los puntos medios de la partición. Sean $g \in H^1$ (como antes), g_h la solución de (P_h) y $Q_h g \in S_h$ el interpolante de g en los puntos medios

$$\left| \begin{array}{l} Q_h g \in S_h, \\ Q_h g(z_i) = g(z_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Si la sucesión de mallados es casi-uniforme

$$\max h_i \leq \mu \min h_i,$$

en S_h se satisface una desigualdad inversa

$$\|r_h\|_{L^\infty} \leq Ch^{-1/2}\|r_h\|_{L^2}, \quad \forall r_h \in S_h, \quad (1.13)$$

con $C = C(\mu)$. La desigualdad (1.13) proporciona la estimación inversa de normas L^2 y L^∞ (la directa es obvia) en la sucesión de espacios finito-dimensionales S_h (las normas en cada uno de estos espacios son equivalentes). Así

$$\begin{aligned} \|g - g_h\|_{L^\infty} &\leq \|g - Q_h g\|_{L^\infty} + \|Q_h g - g_h\|_{L^\infty} \\ &\leq \|g - Q_h g\|_{L^\infty} + Ch^{-1/2}\|Q_h g - g_h\|_{L^2} \\ &\leq \|g - Q_h g\|_{L^\infty} + Ch^{-1/2}\|g - g_h\|_{L^2} + Ch^{-1/2}\|g - Q_h g\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Así, si $g, g' \in L^\infty$ se tiene

$$\|g - g_h\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(h^{1/2}).$$

1.4 Aplicación

Tal y como estaba formulada la ecuación (1.6), se tienen problemas de falta de unicidad (solución hay, puesto que se puede pasar por el problema interior y la fórmula de representación). Una simple modificación consiste en resolver

$$\frac{1}{2}\varphi - K_\Gamma \varphi + \int_\Gamma \varphi = V_\Gamma \lambda,$$

problema que sí tiene solución única. Más aún, la solución cumple

$$\int_\Gamma \varphi = 0$$

luego es la solución de (1.6). Con ello, de entre las posibles soluciones del problema de Neumann escogemos aquella tal que

$$\int_\Gamma u|_\Gamma = 0.$$

Parametrizando como antes, $g(s) := \varphi(\mathbf{x}(s))$, se tiene la ecuación

$$\frac{1}{2}g(s) - \int_0^1 K(s,t)g(t)dt = f(s)$$

siendo ahora

$$K(s,t) = \left(\frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{n}(t)}{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2} - 1 \right) |\mathbf{x}'(t)|.$$

La solución por el método de Galerkin con constantes a trozos, g_h , nos permite una fórmula de representación aproximada en la frontera

$$u_h(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{n}(t)}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}(t)|^2} |\mathbf{x}'(t)| g_h(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \lambda(\mathbf{x}(t)) \log |\mathbf{z} - \mathbf{x}(t)| |\mathbf{x}'(t)| dt \quad (1.14)$$

Más aproximación. El sistema (1.11) se puede aproximar utilizando la fórmula del punto medio tanto en la matriz

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} K(s,t) ds dt \approx h_i h_j K(z_i, z_j)$$

(hemos denotado como antes $z_i := (s_i + s_{i-1})/2$) como en el término independiente

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s) ds \approx h_i f(z_i).$$

Dividiendo la ecuación i -ésima por h_i , obtenemos un sistema

$$g_i^* - \sum_{j=1}^N h_j K(z_i, z_j) g_j^* = f(z_i) \quad (1.15)$$

Apunte. Con esta aproximación tan simple, (1.15) es a la vez un método de Galerkin totalmente discretizado y un tradicional método de cuadratura (o de Nyström). Esta coincidencia de dos métodos a través de un proceso elemental de integración numérica para un problema muy simple es similar a la recuperación de métodos de diferencias finitas a partir de métodos de elementos finitos con fórmulas de cuadratura. Como entonces, se trata únicamente de coincidencias en el nivel de lo trivial.

Volviendo a (1.14), hagamos primero notar que u_h cumple exactamente la ecuación en Ω . Son las condiciones de contorno las que se cumplen de forma aproximada. Aplicando de nuevo fórmulas del punto medio a trozos podemos dar una versión completamente discreta de (1.14)

$$u_h^*(\mathbf{z}) := -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{n}_j}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}_j|^2} \xi_j^1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \log |\mathbf{z} - \mathbf{x}_j| \xi_j^2$$

siendo

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j &= \mathbf{x}(z_j) \in \Gamma, \\ \mathbf{n}_j &= \mathbf{n}(z_j), \\ \xi_j^1 &= h_j |\mathbf{x}'(z_j)| g_j^*, \\ \xi_j^2 &= h_j \lambda(\mathbf{x}_j) |\mathbf{x}'(z_j)|.\end{aligned}$$

Sin acercarse demasiado a Γ (para ello se utilizan otras técnicas) se tiene que

$$|u(\mathbf{z}) - u_h(\mathbf{z})| \leq Ch^2,$$

esto es, la convergencia es mejor para el problema de contorno que el resultado obtenido para el dato Dirichlet en (1.12). Esta cota se transmite al resto de las aproximaciones.

Más información

Sobre teoría y numérico de ecuaciones integrales de segundo tipo, [1] es referencia obligada. Los libros [14] y [17] contienen detalladas exposiciones de la teoría de Fredholm–Riesz, el primero de ellos incluyendo su relación con métodos de Galerkin. Estas cuestiones básicas pueden ser también consultadas en [5, 10] y en un marco mucho más abstracto y generalizado en [19, 22]. Las fórmulas de representación se pueden encontrar en [20] y en cualquier texto o curso de métodos integrales, como por ejemplo [3, 5, 7, 8].

Capítulo 2

Potenciales y ecuaciones de primer tipo

2.1 Potencial de capa simple

Motivados por la aparición de términos integrales sobre la frontera –como convoluciones con la solución fundamental y con su derivada normal– en la fórmula de representación, la idea de utilizar potenciales consiste en buscar soluciones de

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma,$$

definidas de la forma

$$u(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| q(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) =: \mathcal{S}_{\Gamma} q(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2. \quad (2.1)$$

A esta representación de la solución se le denomina **potencial de capa simple**. Notemos brevemente algunas propiedades simples:

- si $q \in L^1(\Gamma)$, $u : \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ está bien definida, es de clase \mathcal{C}^{∞} en $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ y cumple

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma,$$

- si además, $q \in L^p(\Gamma)$ con $p \in (1, \infty]$, entonces $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^2)$.

Apunte. La expresión (2.1) tiene la interpretación electrostática de una distribución de cargas q sobre Γ (sección transversal de un cilindro infinito) que genera el potencial u . La posibilidad de utilizar expresiones de la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x})$$

como “propuesta” de solución corresponde a distribuciones de dipolos sobre Γ orientados según la normal a la curva. La función resultante es discontinua a través de Γ y recibe el nombre de **potencial de capa doble**.

Se trata entonces de forzar el valor en la frontera mediante una ecuación integral

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| q(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad (2.2)$$

y utilizar luego (2.1) como fórmula de representación de una solución de

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \\ u|_{\Gamma} = u_0. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Notemos que (2.1)–(2.2) da una posibilidad de tratar la ecuación de Laplace en dominios no acotados.

Antes de tomar directamente (2.2) como una ecuación integral por resolver, vamos a estudiar el comportamiento en infinito de la solución propuesta por (2.1). Con ello motivaremos una posible, y a veces recomendable, modificación del par (2.1)–(2.2).

Es fácil ver que

$$\mathcal{S}_{\Gamma} q(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma} q \right) \log |\mathbf{y}| + \mathcal{O} \left(\frac{1}{|\mathbf{y}|} \right), \quad |\mathbf{y}| \rightarrow \infty,$$

uniformemente en todas las direcciones. Si buscamos soluciones acotadas de (2.3), necesariamente habría que exigir

$$\int_{\Gamma} q = 0, \quad (2.4)$$

con interpretación electrostática de que la carga total debe ser nula. Por tanto, mediante el potencial de capa simple no se pueden representar soluciones constantes no nulas del laplaciano en el exterior de Γ .

Apunte. Hay varias razones para pensar en añadir condiciones en infinito. Cuando el dominio es no acotado, se puede decir que en cierto modo el infinito está en su frontera. Puesto que el laplaciano es un operador elíptico, es razonable imponer condiciones de contorno sobre toda su frontera. De hecho, es necesario. Una condición de comportamiento de la solución en infinito se denomina habitualmente una **condición de radiación**.

La imposición de la condición (2.4) se compensa añadiendo una incógnita escalar adicional. De esta manera, el problema queda como:

1. una ecuación integral ampliada con $q : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ y $c \in \mathbf{R}$ como incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\cdot - \mathbf{x}| q(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) + c = u_0, \quad \text{en } \Gamma, \\ \int_{\Gamma} q = 0; \end{array} \right. \quad (2.5)$$

2. la correspondiente fórmula para la solución en todo \mathbf{R}^2

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\cdot - \mathbf{x}| q(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) + c.$$

La otra opción es ignorar el comportamiento en infinito y buscar soluciones de la ecuación

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\cdot - \mathbf{x}| q(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) = u_0, \quad \text{en } \Gamma, \quad (2.6)$$

para proponer

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\cdot - \mathbf{x}| q(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x})$$

como solución de la ecuación de Laplace.

En ambos casos, los problemas introducen ecuaciones integrales de primer tipo (la incógnita aparece sólo bajo el signo integral) con núcleo (esto es, $\log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$) débilmente singular.

El operador integral involucrado en ambos problemas es

$$q \longmapsto V_{\Gamma} q := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\cdot - \mathbf{x}| q(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma \rightarrow \mathbf{R},$$

que recibe el algo obvio nombre de **operador logarítmico**.

Apunte. Vueltos al marco Sobolev, se puede demostrar que si Γ es Lipschitziana, V_{Γ} define un operador continuo de $H^{-1/2}(\Gamma)$ en $H^{1/2}(\Gamma)$. Además se tiene que en

$$H_0^{-1/2}(\Gamma) := \{q \in H^{-1/2}(\Gamma) \mid \langle q, 1 \rangle_{\Gamma} = 0\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ denota la dualidad $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, el operador V_{Γ} es elíptico, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $q \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$

$$\langle V_{\Gamma} q, q \rangle_{\Gamma} \geq \alpha \|q\|_{-1/2, \Gamma}^2.$$

2.2 Parametrización del problema

Supongamos de nuevo que disponemos de una parametrización 1-periódica de Γ

$$\mathbf{x} : \mathbf{R} \longrightarrow \Gamma$$

en las condiciones dadas en (1.7). Escribiendo

$$\begin{aligned} g(s) &:= \frac{1}{4\pi} q(\mathbf{x}(s)) |\mathbf{x}'(s)|, \\ f(s) &:= u_0(\mathbf{x}(s)) \end{aligned}$$

y

$$Vg := - \int_0^1 \log |\mathbf{x}(\cdot) - \mathbf{x}(t)|^2 g(t) dt : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \quad (2.7)$$

las ecuaciones (2.5) y (2.6) pasan a ser ecuaciones integrales en \mathbf{R} con datos y soluciones periódicas

$$\left| \begin{array}{l} Vg + c = f, \\ \int_0^1 g = 0, \end{array} \right. \quad \text{ó} \quad Vg = f.$$

Igualmente el potencial de capa simple parametrizado $\mathcal{S}g$ queda

$$\mathcal{S}_\Gamma q(\mathbf{y}) = \mathcal{S}g(\mathbf{y}) := - \int_0^1 \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)|^2 g(t) dt : \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}.$$

El caso en que Γ es una circunferencia es particularmente simple e interesante. Si

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \rho(\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t),$$

entonces el operador (2.7) se convierte en

$$\Lambda_\rho g := - \int_0^1 \log (4\rho^2 \text{sen}^2(\pi(\cdot - t))) g(t) dt. \quad (2.8)$$

El caso general puede ser contemplado como una perturbación de éste, ya que

$$Vg = \Lambda_\rho g + \int_0^1 K(\cdot, t) g(t) dt =: \Lambda_\rho g + Kg$$

con

$$K(s, t) := \begin{cases} -\log \frac{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2}{4\rho^2 \text{sen}^2(\pi(s-t))}, & s - t \notin \mathbf{Z}, \\ -\log \frac{|\mathbf{x}'(t)|^2}{4\pi^2 \rho^2}, & s - t \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (2.9)$$

El operador K es un operador integral con núcleo C^∞ .

Nótese que Λ_ρ es la convolución periódica con la función $-\log(4\rho^2 \operatorname{sen}^2(\pi t))$. Denotando

$$\phi_n(t) := \exp(2\pi i n t), \quad (2.10)$$

se tiene

$$\Lambda_\rho \phi_n(s) = - \left[\int_0^1 \log(4\rho^2 \operatorname{sen}^2(\pi t)) \phi_{-n}(t) dt \right] \phi_n(s), \quad (2.11)$$

luego los monomios trigonométricos (2.10) son funciones propias de Λ_ρ . Los valores propios son

$$- \int_0^1 \log(4\rho^2 \operatorname{sen}^2(\pi t)) \phi_{-n}(t) dt = \begin{cases} -2 \log \rho, & n = 0, \\ \frac{1}{|n|}, & n \neq 0, \end{cases}$$

esto es, los coeficientes de Fourier de la función $-\log(4\rho^2 \operatorname{sen}^2(\pi t))$. Más aún, para cualquier polinomio trigonométrico

$$g = \sum_k \widehat{g}(k) \phi_k \in \mathbb{T} := \operatorname{span}\langle \phi_n \mid n \in \mathbf{Z} \rangle$$

(la suma está limitada a un número finito de términos), se tiene

$$\Lambda_\rho g = -2 \log \rho \widehat{g}(0) + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|} \widehat{g}(k) \phi_k. \quad (2.12)$$

La expresión (2.12) tiene un buen número de consecuencias fácilmente deducibles:

i. Tanto (2.8) como (2.12) tienen perfecto sentido cuando $g \in L^2(0, 1)$, ya que entonces

$$\sum_k |\widehat{g}(k)|^2 < \infty,$$

siendo

$$\widehat{g}(k) := \int_0^1 g(t) \phi_{-k}(t) dt, \quad k \in \mathbf{Z}$$

los coeficientes de Fourier de g . Además, como (2.8) y (2.12) coinciden en \mathbb{T} , que es denso en $L^2(0, 1)$, ambas expresiones son iguales para toda $g \in L^2(0, 1)$.

ii. Si $g \in L^2(0, 1)$, entonces por (2.12)

$$\sum_k |k|^2 |\widehat{\Lambda_\rho g}(k)|^2 < \infty,$$

luego los coeficientes de Fourier de $\Lambda_\rho g$ decrecen más rápidamente que los de g . Entre otras cosas se tiene que $\sum_k |\widehat{\Lambda_\rho g}(k)| < \infty$, luego $\Lambda_\rho g$ es una función uniformemente continua y periódica (esto también se deduce de (2.11))

iii. Si $\rho = 1$ se tiene $\Lambda_1 1 = 0$, luego Λ_1 no es inyectivo. De (2.12) se deduce también que $\Lambda_1 g = 1$ no tiene solución en $L^2(0, 1)$.

iv. Si $f \in L^2(0, 1)$ y cumple

$$\sum_k |k|^2 |\widehat{f}(k)|^2 < \infty,$$

entonces

$$\Lambda_\rho g = f$$

tiene una única solución $g \in L^2(0, 1)$ siempre que $\rho \neq 1$. En el caso “singular” $\rho = 1$, el problema

$$\left| \begin{array}{l} \Lambda_\rho g + c = f \\ \int_0^1 g = 0 \end{array} \right.$$

tiene solución única.

v. Por último, notemos que para todo $g \in L^2(0, 1)$

$$\int_0^1 \overline{g(t)} \Lambda_\rho g(t) dt = -2 \log \rho \left| \int_0^1 g(t) dt \right|^2 + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|} |\widehat{g}(k)|^2.$$

Así $\rho = 1$ es también el valor crítico que separa las regiones donde Λ_ρ es definido positivo ($\rho < 1$) o no ($\rho > 1$).

2.3 Espacios de Sobolev periódicos y operadores logarítmicos

Lo visto anteriormente con el operador Λ_ρ hace natural considerar los espacios (que denotaremos $H^r, r \in \mathbf{R}$) que se obtienen al completar el espacio de los polinomios trigonométricos \mathbb{T} con las normas

$$\|g\|_r := \left[|\widehat{g}(0)|^2 + \sum_{k \neq 0} |k|^{2r} |\widehat{g}(k)|^2 \right]^{1/2}.$$

Cuando $r = 0$, tenemos trivialmente $H^0 = L^2(0, 1)$ y

$$\|g\|_0^2 = \int_0^1 |g(t)|^2 dt.$$

Para valores positivos $r > 0$, estamos en subespacios de $L^2(0, 1)$. En concreto para valores enteros tenemos

$$H^m = \{g \in H^m(0, 1) \mid g^{(j)}(0) = g^{(j)}(1), 0 \leq j \leq m - 1\},$$

de ahí la denominación de **espacios de Sobolev periódicos**. Cuando $r < 0$, el espacio H^r se puede caracterizar como un conjunto de distribuciones periódicas, o bien como el dual de H^{-r} cuando se realiza la identificación de H^0 con su dual.

Listemos seguidamente otras propiedades de fácil verificación:

- Para todo $r \in \mathbf{R}$, H^r es un espacio de Hilbert separable.
- Si $r_1 > r_2$, $H^{r_1} \subset H^{r_2}$, siendo la inclusión continua, densa y compacta.
- La derivación formal de la serie de Fourier

$$\sum_k \widehat{g}(k) \phi_k \longmapsto \sum_k 2k\pi i \widehat{g}(k) \phi_k \quad (2.13)$$

define un operador continuo $H^r \rightarrow H^{r-1}$ para todo $r \in \mathbf{R}$, que extiende a la derivación.

- Si $r > 1/2$, H^r está contenido en

$$\{g \in \mathcal{C}[0, 1] \mid g(0) = g(1)\}$$

con inyección continua (en este espacio se toma la norma del máximo). Por tanto, la intersección de todos los espacios H^r es el conjunto de las funciones \mathcal{C}^∞ periódicas.

La dualidad recíproca entre H^r y H^{-r} se establece como extensión del producto escalar de H^0

$$(f, g)_0 = \sum_k \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt,$$

de modo que además

$$\|f\|_r = \sup_{0 \neq g \in H^{-r}} \frac{|(f, g)_0|}{\|g\|_{-r}}.$$

Apunte. Aunque aparezcan signos de conjugación, nuestro interés en este capítulo y el que sigue está en las funciones reales, que cumplen una simetría en sus coeficientes de Fourier

$$\overline{\widehat{g}(k)} = \widehat{g}(k).$$

Así, aunque aparezcan los monomios trigonométricos complejos, mucho más manejables, los espacios son reales. Cuando haga falta emplear funciones complejas de variable real, en el Capítulo 5, pasaremos automáticamente al contexto complejo.

En el caso particular $\rho = e^{-1/2}$, Λ_ρ se convierte en el llamado **operador de Bessel**

$$\begin{aligned} \Lambda g &= - \int_0^1 \log(4e^{-1} \operatorname{sen}^2(\pi(\cdot - t))) g(t) dt = \\ &= \widehat{g}(0) + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|} \widehat{g}(k) \phi_k \end{aligned}$$

que es continuo de H^r en H^{r+1} para todo r . Se dice entonces que Λ es un operador pseudodiferencial de orden -1 (compárese con la derivada (2.13)). Además Λ es un isomorfismo entre H^r y H^{r+1} , es isométrico y, como

$$(\Lambda g, g)_0 = \|g\|_{-1/2}^2, \quad \forall g \in H^{-1/2}, \quad (2.14)$$

es elíptico en $H^{-1/2}$.

Si Γ es una curva \mathcal{C}^∞ , el operador

$$Vg := - \int_0^1 \log |\mathbf{x}(\cdot) - \mathbf{x}(t)|^2 g(t) dt$$

se puede descomponer en la forma

$$V = \Lambda + K, \quad (2.15)$$

siendo K un operador integral con núcleo \mathcal{C}^∞ periódico (ver (2.9), con $\rho = e^{-1/2}$). Es fácil ver que K admite extensión a todos los espacios H^r , $r \in \mathbf{R}$, y que la imagen está en la intersección de todos ellos por ser una función \mathcal{C}^∞ periódica. Así $K : H^{r_1} \rightarrow H^{r_2}$ es compacto para todo $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$. Esto implica que V admite extensión

$$V : H^r \longrightarrow H^{r+1}$$

para todo $r \in \mathbf{R}$. Atendiendo a la descomposición (2.15) y a la elipticidad (2.14), V es una perturbación compacta de un operador elíptico. Más aún, se puede demostrar que existe $\alpha > 0$ tal que

$$(Vg, g)_0 \geq \alpha \|g\|_{-1/2}^2, \quad \forall g \in H_0^{-1/2} \quad (2.16)$$

siendo

$$H_0^{-1/2} = \{g \in H^{-1/2} \mid (1, g)_0 = 0\}.$$

Apunte. En general $V : H^r \rightarrow H^{r+1}$ no tiene por qué ser invertible ni elíptico. Esta propiedad tiene que ver con el tamaño de la curva Γ . De hecho, existe una magnitud $C_\Gamma > 0$ llamada **capacidad logarítmica** de Γ que funciona como un diámetro (es invariante por rotaciones y traslaciones, y los cambios de escala le afectan proporcionalmente $C_{\alpha\Gamma} = \alpha C_\Gamma$) que demarca tres posibilidades: (a) si $C_\Gamma < 1$, V es elíptico en $H^{-1/2}$; (b) si $C_\Gamma = 1$, V tiene núcleo unidimensional y la imagen tiene codimensión uno; (c) si $C_\Gamma > 1$, V es invertible pero no elíptico. Cuando Γ es una circunferencia, C_Γ es su radio (nótese el paralelismo entre (a)-(b)-(c) y las propiedades de Λ_ρ).

Nos planteamos entonces los dos problemas deducidos de la sección 1:

$$\left| \begin{array}{l} g \in H^{-1/2}, \\ Vg = f, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

o bien,

$$\left| \begin{array}{l} g \in H_0^{-1/2}, \quad c \in \mathbf{R}, \\ Vg + c = f. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

En ambos casos, tomamos $f \in H^{1/2}$. La condición de pertenencia a $H_0^{-1/2}$ en (2.18), esto es, $(1, g)_0 = 0$ es una forma débil de escribir

$$\int_0^1 g(t) dt = 0,$$

condición heredada de (2.5). El problema (2.18) es más simple, ya que gracias a (2.16) se puede escribir como un problema elíptico

$$\begin{cases} g \in H_0^{-1/2}, \\ (Vg, r)_0 = (f, r)_0, \quad \forall r \in H_0^{-1/2}, \end{cases} \quad (2.19)$$

y el cálculo

$$c = \int_0^1 (f(t) - Vg(t)) dt = (f - Vg, 1)_0.$$

En el caso de que V sea invertible, baste recordar que es perturbación compacta de un problema elíptico.

2.4 Un método de Galerkin

Sean de nuevo

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1,$$

mallado que extenderemos N -periódicamente a s_j , $j \in \mathbf{Z}$ en caso de necesidad. Definimos

$$S_h = \{g_h : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R} \mid g_h|_{(s_i, s_{i+1})} \in \mathbb{P}_0, \forall i\} \subset H^0$$

y su subespacio

$$S_{h,0} = \{g_h \in S_h \mid \int_0^1 g_h = 0\} \subset H_0^{-1/2}.$$

Consideremos la discretización de (2.19)

$$\begin{cases} g_h \in S_{h,0}, \\ (Vg_h, r_h)_0 = (f, r_h)_0, \quad \forall r_h \in S_{h,0}, \end{cases} \quad (2.20)$$

que tiene solución única por ser V elíptico en $H_0^{-1/2}$. Además se tiene el lema de Céa

$$\|g - g_h\|_{-1/2} \leq C \inf_{r_h \in S_{h,0}} \|g - r_h\|_{-1/2}. \quad (2.21)$$

Por tanto,

$$\|g_h\|_{-1/2} \leq C' \|g\|_{-1/2}.$$

Si $g \in H^1$ (esto es, $f \in H^2$) se puede estimar fácilmente el ínfimo de (2.21) y obtener

$$\|g - g_h\|_{-1/2} \leq Ch^{3/2} \|g\|_1,$$

siendo $h = \max h_i$. Por densidad esto implica la convergencia en norma $H^{-1/2}$ (que es una norma débil, no funcional) cuando $h \rightarrow 0$ para todo $g \in H_0^{-1/2}$.

Convergencia en normas fuertes. Si la sucesión de mallados es casi-uniforme, esto es,

$$\max h_i \leq \mu \min h_i$$

tenemos una desigualdad inversa en S_h

$$\|r_h\|_0 \leq Ch^{-1/2} \|r_h\|_{-1/2}, \quad \forall r_h \in S_h.$$

Con ello podemos demostrar que

$$\begin{aligned} \|g - g_h\|_0 &\leq \|g - \Pi_h g\|_0 + \|\Pi_h g - g_h\|_0 \leq \\ &\leq \|g - \Pi_h g\|_0 + Ch^{-1/2} \|\Pi_h g - g_h\|_{-1/2} \leq \\ &\leq \|g - \Pi_h g\|_0 + Ch^{-1/2} \|g - g_h\|_{-1/2} + Ch^{-1/2} \|\Pi_h g - g\|_{-1/2} \leq \\ &\leq C'h \|g\|_1 \end{aligned}$$

comparando con un elemento $\Pi_h g \in S_{h,0}$ que alcance la aproximación óptima simultáneamente en H^0 ($\mathcal{O}(h)$) y $H^{-1/2}$ ($\mathcal{O}(h^{3/2})$).

Posprocesos. Por otra parte, si volvemos a nuestra intención original de resolver un problema de contorno hay que sustituir g en la expresión del potencial

$$\mathcal{S}g = - \int_0^1 \log |\cdot - \mathbf{x}(s)|^2 g(s) ds,$$

por g_h . Si fijamos $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ y llamamos $\phi(s) := \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}(s)|^2 \in \mathcal{C}^\infty$, el error

$$|\mathcal{S}g(\mathbf{y}) - \mathcal{S}g_h(\mathbf{y})| = |(\phi, g - g_h)_0| \leq \|\phi\|_r \|g - g_h\|_{-r}$$

se puede acotar utilizando estimaciones en normas débiles, ya que $\phi \in H^r$ para todo r . Otro tanto ocurre al comparar

$$c_h = \int_0^1 (f(t) - Vg_h(t)) dt$$

con el valor exacto.

Convergencia en normas débiles. La estimación de $\|g - g_h\|$ en normas más débiles se realiza mediante la técnica de Aubin-Nitsche, basada en propiedades de dualidad y en la simetría del operador V . Se obtiene una convergencia

$$\|g - g_h\|_{-2} \leq Ch^3 \|g\|_1, \quad (2.22)$$

que no puede ser mejorada en normas más débiles. Así

$$|c - c_h| = \mathcal{O}(h^3)$$

y

$$|\mathcal{S}g(\mathbf{y}) - \mathcal{S}g_h(\mathbf{y})| = \mathcal{O}_{\mathbf{y}}(h^3).$$

2.5 El sistema asociado

Sean χ_i las funciones características de los intervalos (s_{i-1}, s_i) . Entonces

$$\psi_i := \frac{1}{h_{i+1}} \chi_{i+1} - \frac{1}{h_i} \chi_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

es una base de $S_{h,0}$. El método de Galerkin (2.20) se limita al cálculo de $g_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \psi_i$ mediante la resolución del sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{N-1} (V\psi_j, \psi_i)_0 u_j = (f, \psi_i)_0, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Para obtener el sistema se requiere el cómputo de las integrales

$$\begin{aligned} (V\chi_j, \chi_i)_0 &= - \int_0^1 \int_0^1 \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2 \chi_j(t) \chi_i(s) ds dt = \\ &= - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2 ds dt, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$(f, \chi_i)_0 = \int_0^1 f(s) \chi_i(s) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s) ds. \quad (2.24)$$

Nótese que a pesar de que se ha construido una base de $S_{h,0}$ con funciones de soporte reducido, la matriz del sistema es llena ya que el operador integral V no es local. Además, las integrales (2.23) son débilmente singulares cuando $i - j \in \{-1, 0, 1\}$; de hecho, N -cíclicamente, puesto que para $i = 1, j = N$ también se tiene una singularidad.

El caso uniforme

$$h = h_i = s_i - s_{i-1}, \quad \forall i$$

permite un tratamiento especialmente simple del problema. En este caso podemos tomar

$$\psi_i := \chi_{i+1} - \chi_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (2.25)$$

como base de $S_{h,0}$ y la solución $g_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \psi_i$ se puede expresar como

$$g_h = \sum_{i=1}^N g_i \chi_i,$$

con $g_1 = -u_1$, $g_N = u_{N-1}$ y $g_i = u_{i-1} - u_i$ para $2 \leq i \leq N-1$.

Nótese que se debe intentar aproximar las integrales (2.23) y (2.24) con un grado de precisión suficiente para preservar el orden h^3 de convergencia en normas débiles.

Aproximación del término independiente. Denotamos

$$z_i := \frac{s_{i-1} + s_i}{2}$$

a los puntos medios de los intervalos. Así aproximamos

$$\begin{aligned} b_i &:= \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s) ds = h \int_{-1/2}^{1/2} f(z_i + hu) du \approx \\ &\approx hL f(z_i + h \cdot) = \frac{h}{24} [f(z_{i-1}) + 22f(z_i) + f(z_{i+1})] =: \beta_i. \end{aligned}$$

La fórmula de cuadratura “base” en $(-1/2, 1/2)$ es

$$Lp := \frac{1}{24}p(-1) + \frac{11}{12}p(0) + \frac{1}{24}p(1) \approx \int_{-1/2}^{1/2} p(u) du,$$

simétrica y grado tres. La utilización de puntos de fuera del intervalo está autorizada por la periodicidad de la función, que da siempre margen de puntos de evaluación, puesto que nunca se llega al extremo del dominio de definición. Su justificación está en la reducción del número de evaluaciones.

Aproximación de la matriz. Para aproximar las integrales (2.23) seguimos un proceso en el que se subtrae la singularidad. Nos concentramos primero en la elección de índices: los valores

$$a_{ij} := - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2 ds dt$$

están definidos para todo $i, j \in \mathbf{Z}$ con repetición N -periódica en ambos casos. Así podemos concentrarnos en calcular

$$a_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad |j - i| \leq N/2.$$

En el caso N par, el proceso que desarrollaremos dará la misma aproximación para $a_{i, i+N/2}$ que para $a_{i, i-N/2}$ por lo que no es importante qué representante tomemos. Para estos índices descomponemos

$$a_{ij} = - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \log \frac{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2}{(s-t)^2} ds dt - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \log(s-t)^2 ds dt =: a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)}.$$

Si escribimos

$$F(s, t) := \begin{cases} -\log \frac{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2}{(s-t)^2}, & 0 < |s-t| < 1, \\ -\log |\mathbf{x}'(t)|^2, & s = t, \end{cases} \quad (2.26)$$

y notamos que F es regular en la franja $|s-t| < 1$, el proceso resultante es simple.

- Por un lado se aproxima

$$a_{ij}^{(1)} = h^2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} F(z_i + hu, z_j + hv) du dv \approx h^2 L^2 F(z_i + h \cdot, z_j + h \cdot) =: \alpha_{ij}^{(1)},$$

siendo L^2 la fórmula obtenida por aplicación de L en cada variable de integración (una fórmula de **nueve puntos**, por tanto).

- Por otro, se calcula exactamente

$$a_{ij}^{(2)} = -h^2 \left[\log h^2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \log(u-v+i-j)^2 du dv \right] = -h^2 [\log h^2 + \rho_{i-j}] =: \alpha_{ij}^{(2)}.$$

Las cantidades ρ_k no dependen del problema particular (ni de los datos ni de la curva), por lo cual pueden ser calculadas previamente. Además $\rho_k = \rho_{-k}$.

La fórmula de cuadratura empleada utiliza valores de F en puntos (z_i, z_j) , $|j-i| \leq N/2 + 1$, que son empleados para distintas integrales. La evaluación en la diagonal $F(z_i, z_i)$ sigue una fórmula distinta (ver (2.26)).

Método de Galerkin–colocación. La anterior discretización completa de las ecuaciones del método de Galerkin recibe el nombre de método de Galerkin–colocación por su similitud con las ecuaciones semidiscretas del método de colocación (ver Capítulo 4). En resumen, el método se puede implementar como sigue.

Empleamos los coeficientes

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{24}, \quad c_0 = \frac{11}{12}.$$

El sistema final

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

es cuadrado de orden $N - 1$ y corresponde a la última fase de la aproximación, luego los elementos $a_{i,j}$ y b_j no corresponden a los indicados anteriormente.

```

for  $i = 1 : N$ 
     $f_i = f(z_i)$ 
 $f_0 = f_N$ 
 $f_{N+1} = f_1$ 
for  $i = 1 : N$ 
     $\beta_i = h[c_{-1}f_{i-1} + c_0f_i + c_1f_{i+1}]$ 
for  $i = 1 : N$ 
    for  $j = i - N/2 - 2 : i + N/2 + 2$ 
         $F_{ij} = F(z_i, z_j)$ 
for  $j = -N/2 - 2 : N/2 + 2$ 
         $F_{0j} = F_{N,j+N}$ 
for  $j = -N/2 : N/2 + 2$ 
         $F_{N+1,j+N} = F_{1j}$ 
for  $i = 1 : N$ 
    for  $j = i : \min(i + N/2, N)$ 
         $\alpha_{ij} = h^2(\sum_{k,l=-1}^1 c_k c_l F_{i+k,j+l} - \log h^2 - \rho_{|i-j|})$ 
         $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ 
    for  $j = \min(i + N/2, N) + 1 : N$ 
         $\alpha_{ij} = h^2(\sum_{k,l=-1}^1 c_k c_l F_{i+k,j-N+1} - \log h^2 - \rho_{|i-j|})$ 
         $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ 

```



```

for  $i = 1 : N - 1$ 
     $b_i = \beta_{i+1} - \beta_i$ 
    for  $j = 1 : N - 1$ 
         $a_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{i+1,j+1} - \alpha_{i,j+1} - \alpha_{i+1,j}$ 
resolver  $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$ 
 $g_1 = -u_1$ 
for  $i = 2 : N - 1$ 
     $g_i = u_{i-1} - u_i$ 
 $g_N = u_{N-1}$ 

```

La reorganización final de matriz y término independiente está causada porque la base es $\chi_{i+1} - \chi_i$ (ver (2.25)) y no χ_i . Tras resolver, el vector solución se reorganiza para escribir la solución en la forma

$$g_h^* = \sum_{i=1}^N g_i^* \chi_i$$

(g_i^* son los valores de g_h^* en cada “tramo”).

Breve idea del análisis. Si $g_h, r_h \in S_h$ podemos poner

$$g_h = \sum_{i=1}^N g_i \chi_i, \quad r_h = \sum_{i=1}^N r_i \chi_i.$$

Así

$$(Vg_h, r_h)_0 = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} g_j r_i,$$

forma bilineal $S_h \times S_h \rightarrow \mathbf{R}$ que ha sido reemplazada ($\alpha_{ij} \approx \alpha_{ij}$) por

$$v_h(g_h, r_h) := \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} g_j r_i.$$

Se puede demostrar entonces con un cuidadoso análisis de fórmulas de cuadratura que

$$|(Vg_h, r_h)_0 - v_h(g_h, r_h)| \leq Ch^3 \|r_h\|_{-1/2} \|g_h\|_{-1/2}.$$

Así, para todo $g_h \in S_{h,0}$

$$\alpha \|g_h\|_{-1/2}^2 \leq (Vg_h, g_h)_0 \leq v_h(g_h, g_h) + Ch^3 \|g\|_{-1/2}^2,$$

luego para h suficientemente pequeño, $\alpha - Ch^3 > 0$ y la familia de formas bilineales $v_h : S_{h,0} \times S_{h,0} \rightarrow \mathbf{R}$ es uniformemente elíptica. Como por construcción v_h es simétrica, la matriz del sistema es simétrica y definida positiva.

El hecho de evaluar el término independiente f exige que $f \in H^{\varepsilon+1/2}$, luego el método totalmente discreto no va a ser estable en la norma original $H^{-1/2}$. La forma lineal sobre S_h

$$(f, r_h)_0 = \sum_{i=1}^N b_i r_i$$

se aproxima ($b_i \approx \beta_i$) por $f_h : S_h \rightarrow \mathbf{R}$

$$f_h(r_h) = \sum_{i=1}^N \beta_i r_i.$$

Restringiéndonos a f muy regular se obtiene

$$|(f, r_h)_0 - f_h(r_h)| \leq Ch^{7/2} \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

El método totalmente discretizado se puede escribir

$$\left| \begin{array}{l} g_h^* \in S_{h,0}, \\ v_h(g_h^*, r_h) = f_h(r_h), \quad \forall r_h \in S_{h,0}. \end{array} \right.$$

Así por argumentos estándar (lema de Strang, etc) se obtienen:

- preservación de la convergencia en norma natural

$$\|g - g_h^*\|_{-1/2} = \mathcal{O}(h^{3/2}),$$

- preservación de la convergencia óptima en norma débil (aprovechable para potenciales)

$$\|g - g_h^*\|_{-2} = \mathcal{O}(h^3),$$

- una cota de aproximación entre la solución Galerkin y la Galerkin-colocación

$$\|g_h - g_h^*\|_{-1/2} = \mathcal{O}(h^3),$$

luego, con desigualdades inversas,

$$\|g_h - g_h^*\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |g_i - g_i^*| = \mathcal{O}(h^2). \quad (2.27)$$

Con un análisis bastante detallado del método de Galerkin se puede demostrar que (con hipótesis suficientes de regularidad sobre g)

$$\max_{i=1,\dots,N} |g_i^* - g(z_i)| = \mathcal{O}(h^2) \quad (2.28)$$

luego los coeficientes calculados como solución del sistema son además aproximaciones de orden dos del valor de la solución en los puntos medios. Interpolándolos con una poligonal se obtiene fácilmente una aproximación uniforme de orden dos de la solución.

Para aproximar

$$c_h = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 V g_h^*(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} g_j^*$$

podemos aplicar la fórmula del punto medio compuesta a f (evitando nuevas evaluaciones) y aproximar $a_{ij} \approx \alpha_{ij}$

$$c_h^* := h \sum_{j=1}^N f(z_j) - \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} g_j^*.$$

Para aproximar el potencial, se emplea la fórmula de cuadratura L

$$u_h(\mathbf{z}) = - \int_0^1 \log |\mathbf{z} - \mathbf{x}(t)| g_h^*(t) dt \approx -h \sum_{j=1}^N g_j^* L(\log |\mathbf{z} - \mathbf{x}(z_j + h \cdot)|),$$

lo que reorganizado nos da

$$u_h^*(\mathbf{z}) = -h \sum_{j=1}^N \xi_j \log |\mathbf{z} - \mathbf{x}_j| \quad (2.29)$$

con

$$\xi_j := \frac{1}{24}(g_{j-1}^* + g_{j+1}^*) + \frac{11}{12}g_j^* \quad \mathbf{x}_j := \mathbf{x}(z_j) \in \Gamma.$$

Con ello, además (2.29) es una sencilla expresión del potencial aproximado como una suma de potenciales puntuales

2.6 Extensiones fáciles

El análisis de la aproximación Galerkin del problema

$$Vg = f,$$

siempre que V sea invertible (ver nota en sección 3 sobre invertibilidad) es una obvia extensión de lo anterior. Dada la descomposición

$$V = \Lambda + K$$

(esto es, elíptico más compacto), el método de Galerkin

$$\left\{ \begin{array}{l} g_h \in S_h, \\ (Vg_h, r_h)_0 = (f, r_h)_0, \quad \forall r_h \in S_h, \end{array} \right.$$

es estable en norma $H^{-1/2}$

$$\|g_h\|_{-1/2} \leq C\|g\|_{-1/2},$$

lo que equivale a una estimación de Céa

$$\|g - g_h\|_{-1/2} \leq C \inf_{r_h \in S_h} \|g - r_h\|_{-1/2}.$$

Más aún, la estabilidad se escribe en la forma de una condición inf-sup (Babuška-Brezzi) uniforme

$$\inf_{0 \neq g_h \in S_h} \left[\sup_{0 \neq r_h \in S_h} \frac{(Vg_h, r_h)_0}{\|g_h\|_{-1/2} \|r_h\|_{-1/2}} \right] \geq \beta > 0.$$

A partir de estas propiedades:

- se establecen las mismas cotas de convergencia en $H^{-1/2}$, normas más fuertes (sólo para sucesiones de mallados casi-uniformes) y más débiles (óptimas de orden cúbico) que en el problema anterior;
- se puede realizar la discretización completa por el método de Galerkin colocación y la condición inf-sup se transmite fácilmente a la forma bilineal discreta, manteniéndose así de nuevo todas las propiedades.

Para mejorar las estimaciones de convergencia se pueden emplear espacios discretos con mejores propiedades de aproximación. Por ejemplo, con poligonales periódicas

$$S_h := \{u_h \in \mathcal{C}[0, 1] \mid u_h(0) = u_h(1), u_h|_{(s_{i-1}, s_i)} \in \mathbb{P}_1\},$$

espacio con la misma dimensión N que el anterior ($N - 1$ si exigimos integral nula), se alcanzan los siguientes resultados:

- estabilidad y convergencia en norma natural

$$\|g - g_h\|_{-1/2} \leq Ch^{5/2} \|g\|_2,$$

- convergencia en normas fuertes (mallados casi-uniformes)

$$\|g - g_h\|_s \leq Ch^{2-s} \|g\|_2, \quad s \in (-1/2, 3/2),$$

(de aquí se deduce una convergencia uniforme $\mathcal{O}(h^{3/2-\varepsilon})$)

- convergencia en norma débiles (válida para potenciales, etc)

$$\|g - g_h\|_{-3} \leq Ch^5 \|g\|_2,$$

Con más exigencias de regularidad sobre g se demuestra que en el caso de mallados uniformes

$$\max_i |g_h(z_i) - g(z_i)| = \mathcal{O}(h^2)$$

y por lo tanto hay convergencia uniforme $\mathcal{O}(h^2)$. Nótese que $g_h(z_i)$ serán los valores calculados utilizando una base de funciones “gorro” para S_h .

Si se quiere examinar qué ocurre cuando se mejora la calidad del espacio de aproximación, se debe tener en cuenta lo siguiente. En el caso anterior, la continuidad de los polinomios era innecesaria, ya que S_h debía ser subespacio de H^0 (incluso del más débil $H^{-1/2}$). No obstante, no exigir la continuidad, es decir, tomar S_h como un espacio de funciones \mathbb{P}_1 a trozos discontinuas, incrementa el número de grados de libertad ($N \rightarrow 2N$) sin mejorar las propiedades de aproximación del espacio.

Así, al pasar a funciones \mathbb{P}_2 a trozos, hay una posibilidad de utilizar funciones spline cuadráticas de clase \mathcal{C}^1 . Ello permite no aumentar el número de grados de libertad

(permanece en N), mejorando la capacidad de aproximación del espacio. Además, los espacios de funciones spline admiten bases B -spline de pequeño soporte y fácil evaluación.

Para los casos uniformes ($h_i = h$) con splines regulares de grado k (funciones \mathcal{C}^{k-1} , periódicas y \mathbb{P}_k a trozos) el método de Galerkin-colocación y su análisis son fácilmente extensibles.

Más información

La utilización de potenciales para resolver problemas de contorno está en el origen de la teoría de ecuaciones integrales. El enfoque clásico consistía en llegar a ecuaciones de segundo tipo. Las formulaciones que llegan a ecuaciones logarítmicas se discuten originariamente en [13, 40, 42], en unos casos con la constante adicional y la condición de integral nula y en otros sin ellos. Véase también [20]. En [53] se da un riguroso tratamiento de la equivalencia entre estos problemas. Puesto que ejemplifican las primeras dificultades de los métodos de contorno, casi todos los cursos y textos analizan las ecuaciones logarítmicas. Igualmente, los métodos de tipo Galerkin están tratados tanto en enfoques matemáticos como ingenieriles de la cuestión.

La teoría de espacios de Sobolev periódicos está muy extendida en la comunidad de elementos de contorno. Exposiciones simples, rigurosas y equivalentes (hay varias formas de introducirlos) aparecen en [14, 26, 57], donde también se estudia la relación entre el operador logarítmico y el operador de Bessel. Los operadores de frontera pueden ser tratados también en un marco h lderiano, manteniéndose el carácter Fredholm y perdiendo la elipticidad [7].

El estudio de los métodos de Galerkin para ecuaciones logar micas se inicia en [40, 41, 42]. Están rigurosamente tratados en [23, 53, 54]. La teoría admite una generalización rápida que discutiremos en el capítulo próximo: surge en [41, 51, 55] y se puede encontrar recogida de distintas formas en [5, 19, 22, 23, 27, 28].

La discretización completa explicada procede de ideas originales en [38, 39], reestudiadas y generalizadas en [34, 49], donde igualmente se demuestran las superconvergencias puntuales.

Capítulo 3

Operadores de frontera del laplaciano y métodos de Galerkin

3.1 La proyección de Calderón

Si regresamos a las fórmulas de representación en la frontera (1.1) y (1.2) tenemos: en los puntos del interior de Γ

$$u(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

en la frontera, una primera identidad

$$\frac{1}{2} u|_{\Gamma}(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

y otra procedente de la derivada normal

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{y}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

La derivada normal del segundo sumando de (3.3) no puede entrar en la integral ya que

$$\partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \sim \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}, \quad \text{cuando } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \approx 0$$

tiene una singularidad no integrable. En (3.2) y (3.3) aparecen los cuatro operadores de frontera del laplaciano:

$$\begin{aligned} V_\Gamma \lambda &:= -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log |\cdot - \mathbf{x}| \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}), \\ K_\Gamma^* \lambda &:= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} \log |\cdot - \mathbf{x}| \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}), \\ K_\Gamma \varphi &:= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\cdot - \mathbf{x}| \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}), \\ W_\Gamma \varphi &:= \frac{1}{2\pi} \partial_{\mathbf{n}} \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\cdot - \mathbf{x}| \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Si

$$\lambda = \partial_{\mathbf{n}} u|_\Gamma, \quad \varphi = u|_\Gamma, \quad (3.4)$$

se tienen las identidades (3.2)–(3.3) en la forma operacional:

$$K_\Gamma \varphi + V_\Gamma \lambda = \frac{1}{2} \varphi, \quad (3.5)$$

$$W_\Gamma \varphi - K_\Gamma^* \lambda = \frac{1}{2} \lambda. \quad (3.6)$$

El operador

$$\mathcal{C}^- := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + K_\Gamma & V_\Gamma \\ W_\Gamma & \frac{1}{2}I - K_\Gamma^* \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de **proyección de Calderón** asociado al interior de Γ . Es un operador continuo

$$\mathcal{C}^- : H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$$

Si además $(\varphi, \lambda) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ son los datos de Cauchy de una función armónica en el interior de Ω , entonces (3.5) y (3.6) se reescriben

$$\mathcal{C}^- \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Además se puede demostrar que

$$\mathcal{C}^- \mathcal{C}^- = \mathcal{C}^-,$$

luego de hecho es una proyección.

Para el caso exterior se debe cambiar un signo cada vez que aparece una derivada normal, ya que por convenio la derivada normal siempre apunta hacia el exterior de la frontera Γ , con lo que se tiene:

$$\mathcal{C}^+ := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I - K_\Gamma & -V_\Gamma \\ -W_\Gamma & \frac{1}{2}I + K_\Gamma^* \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}^+ \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

si (φ, λ) son los datos de Cauchy de una función armónica en el exterior, con ciertas restricciones sobre su comportamiento en infinito.

Así se obtienen identidades que cumplen los datos de Cauchy de funciones armónicas en $\text{ext } \Gamma$ y una nueva fórmula de representación como (3.1): para $\mathbf{y} \in \text{ext } \Gamma$

$$u(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) - \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

3.2 Formulaciones directas e indirectas

El punto de vista **directo**, ya sea para el problema exterior como para el interior, consiste en emplear (3.5)–(3.6) o sus equivalentes exteriores (3.7) para obtener ecuaciones relacionando las incógnitas.

Por ejemplo, si tenemos el problema de Robin

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en int } \Gamma \\ \partial_{\mathbf{n}} u + \sigma u|_\Gamma = u_1, \end{cases} \quad (3.9)$$

podemos pensar en utilizar la relación

$$\lambda + \sigma\varphi = u_1$$

(como siempre $\lambda = \partial_{\mathbf{n}} u$, $\varphi = u|_\Gamma$) para eliminar λ en (3.5) y obtener la ecuación

$$\frac{1}{2}\varphi - K_\Gamma\varphi + V_\Gamma(\sigma\varphi) = V_\Gamma u_1, \quad (3.10)$$

que es una ecuación de segundo tipo donde el operador integral incluye una parte logarítmica. Si por el contrario sustituimos en (3.6), obtenemos

$$W_\Gamma\varphi + \frac{1}{2}\sigma\varphi + K_\Gamma^*(\sigma\varphi) = K_\Gamma^* u_1 + \frac{1}{2}u_1. \quad (3.11)$$

Aunque lo parezca, (3.11) no es una ecuación de segundo tipo. La razón (se verá con más detalle en la siguiente sección) es que

$$W_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

es la parte principal del operador que aparece en la ecuación puesto que tiene un carácter similar a una derivada.

El punto de vista **indirecto** trata de forma simultánea los problemas interiores y exteriores. La idea es proponer soluciones de

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma,$$

en la forma de un potencial de capa simple

$$\mathcal{S}_\Gamma \psi_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log |\cdot - \mathbf{x}| \psi_1(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbf{R} \quad (3.12)$$

o de capa doble

$$\mathcal{D}_\Gamma \psi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\cdot - \mathbf{x}| \psi_2(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (3.13)$$

siendo ψ_1 ó ψ_2 una densidad por determinar. Las propiedades de límite de \mathcal{S}_Γ y \mathcal{D}_Γ cuando nos acercamos a Γ reciben el nombre de **relaciones de salto**. Si con el superíndice $^+$ denotamos límites exteriores y $^-$ es empleado para límites interiores, se puede demostrar:

i. $\mathcal{S}_\Gamma \psi_1$ es continua

$$(\mathcal{S}_\Gamma \psi_1)^+ = (\mathcal{S}_\Gamma \psi_1)^- = V_\Gamma \psi_1, \quad (3.14)$$

pero su derivada normal no lo es

$$\partial_{\mathbf{n}}^+ \mathcal{S}_\Gamma \psi_1 = -\frac{1}{2} \psi_1 - K_\Gamma^* \psi_1, \quad (3.15)$$

$$\partial_{\mathbf{n}}^- \mathcal{S}_\Gamma \psi_1 = \frac{1}{2} \psi_1 - K_\Gamma^* \psi_1, \quad (3.16)$$

Así

$$\partial_{\mathbf{n}}^- \mathcal{S}_\Gamma \psi_1 - \partial_{\mathbf{n}}^+ \mathcal{S}_\Gamma \psi_1 = \psi_1. \quad (3.17)$$

ii. $\mathcal{D}_\Gamma\psi_2$ se comporta a la inversa. Es discontinua a través de Γ

$$(\mathcal{D}_\Gamma\psi_2)^+ = -\frac{1}{2}\psi_2 + K_\Gamma\psi_2, \quad (3.18)$$

$$(\mathcal{D}_\Gamma\psi_2)^- = \frac{1}{2}\psi_2 + K_\Gamma\psi_2, \quad (3.19)$$

luego

$$(\mathcal{D}_\Gamma\psi_2)^- - (\mathcal{D}_\Gamma\psi_2)^+ = \psi_2. \quad (3.20)$$

En cambio, su derivada normal es continua

$$\partial_{\mathbf{n}}^+\mathcal{D}_\Gamma\psi_2 = \partial_{\mathbf{n}}^-\mathcal{D}_\Gamma\psi_2 = W_\Gamma\psi_2. \quad (3.21)$$

Apunte. Viene aquí de nuevo a cuento una pequeña interpretación electrostática. El potencial de capa simple es una representación del potencial eléctrico a partir de una distribución de cargas en la frontera. El potencial obtenido es continuo, mientras que el campo eléctrico tiene una discontinuidad al atravesar la frontera en dirección normal, igual a la densidad de carga. El potencial de capa doble corresponde a una distribución de dipolos orientados en la dirección normal a la frontera. El potencial es discontinuo, pero el campo eléctrico no.

Volviendo al problema (3.9), podemos tratar de representar la solución mediante un **potencial de capa simple** (3.12)

$$u = \mathcal{S}_\Gamma\psi_1$$

(ahora ψ_1 no tiene significado físico concreto en función del problema interior). Al imponer la condición de contorno

$$\partial_{\mathbf{n}}^-u + \sigma u^-|_\Gamma = u_1$$

se llega a la ecuación

$$\frac{1}{2}\psi_1 - K_\Gamma^*\psi_1 + \sigma V_\Gamma\psi_1 = u_1,$$

de características similares a (3.10). Si probamos con un potencial de capa doble

$$u = \mathcal{D}_\Gamma\psi_2,$$

nos encontramos con

$$W_\Gamma\psi_2 + \frac{1}{2}\sigma\psi_2 + \sigma K_\Gamma\psi_2 = u_1, \quad (3.22)$$

similar a (3.11).

Apunte. Las ecuaciones obtenidas para el mismo problema con los enfoques directo e indirecto son traspuestas unas de otras. Esto permite dilucidar simultáneamente cuestiones de existencia y unicidad de solución de las ecuaciones integrales resultantes.

3.3 Formas parametrizadas

Las versiones parametrizadas de los operadores de frontera del laplaciano son las siguientes. Tomemos como magnitudes para las formulaciones directas

$$g_1(t) := u|_{\Gamma}(\mathbf{x}(t)),$$

$$g_2(t) := \partial_{\mathbf{n}}u|_{\Gamma}(\mathbf{x}(t)) |\mathbf{x}'(t)|.$$

Definimos entonces los núcleos

$$\begin{aligned} V(s, t) &:= -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)| \\ K(s, t) &:= \frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{n}(t)}{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)|^2} \\ K^*(s, t) &:= \frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{n}(s)}{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)|^2} = K(t, s) \\ W(s, t) &:= \frac{1}{2\pi} |\mathbf{x}'(s)| |\mathbf{x}'(t)| \partial_{\mathbf{n}(s)} \partial_{\mathbf{n}(t)} \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)| = \\ &= -\frac{|\mathbf{x}'(s)| |\mathbf{x}'(t)|}{2\pi} \left[\frac{\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{n}(t)}{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2} + 2 \frac{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{n}(t) (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{n}(s)}{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^4} \right]. \end{aligned}$$

Notemos que el núcleo W tiene una singularidad de la forma $(s - t)^{-2}$, marcadamente no integrable.

Consideramos los cuatro operadores siguientes:

$$Vg_2 := \int_0^1 V(\cdot, t) g_2(t) dt, \quad (3.23)$$

$$Kg_1 := \int_0^1 K(\cdot, t) g_1(t) dt, \quad (3.24)$$

$$K^*g_2 := \int_0^1 K^*(\cdot, t) g_2(t) dt, \quad (3.25)$$

$$Wg_1 := -\frac{d}{ds} \int_0^1 V(s, t) g_1'(t) dt = \text{p.f.} \int_0^1 W(\cdot, t) g_1(t) dt, \quad (3.26)$$

donde p.f. denotan las partes finitas de Hadamard de la integral divergente que sigue.

Se tienen así las relaciones

$$\begin{aligned} Vg_2 &= V_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}}u|_{\Gamma}(\mathbf{x}(\cdot)), \\ K[g_1|\mathbf{x}'|] &= K_{\Gamma} u|_{\Gamma}(\mathbf{x}(\cdot)), \\ K^*g_2 &= K_{\Gamma}^* \partial_{\mathbf{n}}u|_{\Gamma}(\mathbf{x}(\cdot)), \\ \frac{1}{|\mathbf{x}'|} Wg_1 &= W_{\Gamma} u|_{\Gamma}(\mathbf{x}(\cdot)). \end{aligned}$$

A falta de cuestiones de invertibilidad se tienen las siguientes propiedades:

- $V : H^r \rightarrow H^{r+1}$ es continuo para todo $r \in \mathbf{R}$ y es elíptico en $H_0^{-1/2}$

$$(Vg, g)_0 \geq \alpha \|g\|_{-1/2}^2, \quad \forall g \in H_0^{-1/2}.$$

- $W : H^r \rightarrow H^{r-1}$ es continuo para todo $r \in \mathbf{R}$ y elíptico en $H_0^{1/2} := \{g \in H^{1/2} \mid (g, 1)_0 = 0\}$

$$(Wg, g)_0 \geq \gamma \|g\|_{1/2}^2, \quad \forall g \in H_0^{1/2}.$$

- $K, K^* : H^r \rightarrow H^{r+1}$ son compactos para todo r .

Con estos operadores y el operador identidad podemos plantear todas las ecuaciones asociadas a aproximaciones directas e indirectas. Las dividimos en tres clases:

- ecuaciones **hipersingulares** son aquéllas en las aparece W , que pasa a ser la parte principal

$$L_1g := Wg + a_0g + a_1Kg + a_2Vg + a_3K^*g = \dots$$

(a_0, a_1, a_2 y a_3 son funciones regulares),

- ecuaciones de **segundo tipo** son aquéllas de la forma

$$L_0g := g + a_0Vg + a_1K^*g + a_2Kg = \dots$$

(la identidad es la parte principal),

- ecuaciones de **primer tipo con núcleo logarítmico** son las ecuaciones

$$L_{-1}g := Vg + a_0K^*g + a_1Kg = \dots$$

En este contexto no pueden aparecer ecuaciones integrales de primer tipo donde K ó K^* sean los operadores principales, ecuaciones que, por otro lado, dan lugar a problemas mal puestos.

3.4 Métodos de Galerkin

Ecuaciones hipersingulares. Con las ecuaciones de orden uno (las hipersingulares) para el método de Galerkin es necesario que el espacio test-trial esté formado por funciones continuas. Así tomamos como siempre $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = 1$, $h = \max h_i$ y

$$S_h := \{g_h \in \mathcal{C}[0, 1] \mid g_h(0) = g_h(1), g_h|_{(s_{i-1}, s_i)} \in \mathbb{P}_1\}$$

y planteamos el problema discreto

$$\begin{cases} g_h \in S_h, \\ (L_1 g_h, r_h)_0 = (f, r_h)_0, \quad \forall r_h \in S_h, \end{cases}$$

como discretización de la ecuación

$$L_1 g = f.$$

Si el operador es invertible, por ser perturbación compacta de un operador elíptico en $H^{1/2}$ se tienen:

- estabilidad en $H^{1/2}$

$$\|g_h\|_{1/2} \leq C \|g\|_{1/2}$$

y el correspondiente lema de Céa

$$\|g - g_h\|_{1/2} \leq C \inf_{r_h \in S_h} \|g - r_h\|_{1/2},$$

- convergencia en $H^{1/2}$,
- órdenes de convergencia en norma natural

$$\|g - g_h\|_{1/2} \leq Ch^{3/2} \|g\|_2,$$

en normas fuertes (mallados casi-uniformes)

$$\|g - g_h\|_t \leq Ch^{2-t} \|g\|_2, \quad \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2}$$

y en normas débiles

$$\|g - g_h\|_{-1} \leq Ch^3 \|g\|_2.$$

Gracias a la identidad

$$(Wg_1, g_2)_0 = (Vg'_1, g'_2)_0,$$

la parte de implementación correspondiente a W (la única novedosa) con poligonales es equivalente a una implementación asociada a V con constantes a trozos. Por tanto, las estrategias del método de Galerkin colocación (Capítulo 2) son válidas.

Ecuaciones de segundo tipo. Si el operador es de orden cero (ecuación de segundo tipo) se tienen:

- Estabilidad y lema de Céa en H^0 .
- Convergencia: en el caso de constantes a trozos

$$\|g - g_h\|_s \leq Ch^{t-s} \|g\|_t$$

con $-1 \leq s \leq t \leq 1$, $s < 1/2$, $t \geq 0$ (las convergencias en norma superior a H^0 sólo se tienen para el caso casi-uniforme); en concreto, el óptimo es

$$\|g - g_h\|_{-1} = \mathcal{O}(h^2).$$

- Si se emplean poligonales se llega a

$$\|g - g_h\|_0 = \mathcal{O}(h^2),$$

$$\|g - g_h\|_{-2} = \mathcal{O}(h^4),$$

aunque con más requisitos sobre regularidad de la solución exacta.

Ecuaciones logarítmicas. El caso de operadores de orden -1 es esencialmente igual al visto en el Capítulo 2, puesto que lo relevante del operador es su parte principal.

3.5 Situación general

Una única fórmula reúne todo lo anterior y muchas cosas por venir. Consideremos una ecuación

$$L_\beta g = f$$

con $\beta \in \mathbf{Z}$, de forma que $L_\beta : H^r \rightarrow H^{r-\beta}$ para todo r es continuo. Suponemos que $L_\beta = A_\beta + B_\beta$ donde $B_\beta : H^r \rightarrow H^{r-\beta+1}$ y

$$(A_\beta g, g)_0 \geq \gamma \|g\|_{\beta/2}^2, \quad \forall g \in H^{\beta/2}.$$

Al operador L_β le basta ser inyectivo para ser invertible con inversa continua.

Sea S_h^d un espacio de splines regulares periódicos sobre el mallado $0 = s_0 < \dots < s_N = 1$, esto es: cuando $d = 0$ son funciones constantes a trozos; cuando $d \geq 1$, son funciones

$$\begin{aligned} g_h &\in \mathcal{C}^{d-1}[0, 1], \\ g_h^{(j)}(0) &= g_h^{(j)}(1), \quad 0 \leq j \leq d-1, \\ g_h|_{(s_{i-1}, s_i)} &\in \mathbb{P}_d, \quad \forall i. \end{aligned}$$

(De estos espacios se puede dar una base B-spline). Tomemos d de forma que

$$L_\beta g_h \in H_0, \quad g_h \in S_h^d$$

lo que equivale a exigir que

$$d \geq \beta.$$

Entonces el método de Galerkin

$$\left\{ \begin{array}{l} g_h \in S_h^d, \\ (L_\beta g_h, r_h)_0 = (f, r_h)_0, \quad \forall r_h \in S_h^d, \end{array} \right.$$

es estable en la norma $H^{\beta/2}$

$$\|g_h\|_{\beta/2} \leq C \|g\|_{\beta/2},$$

converge cuando $h \rightarrow 0$ y se tiene una colección de estimaciones de convergencia

$$\|g - g_h\|_s \leq Ch^{t-s} \|g\|_t, \quad (3.27)$$

donde

$$\beta - d - 1 \leq s \leq t \leq d + 1, \quad (3.28)$$

$$s < d + \frac{1}{2}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\beta}{2} \leq t. \quad (3.30)$$

Simplemente dos comentarios sobre las cotas de convergencia anteriores:

- la limitación $s < d + 1/2$ está dada por que $g_h \in H^s$ es una función con una regularidad limitada; las cotas en estas normas $\beta/2 < s < d + 1/2$ son válidas en el caso casi-uniforme;
- la convergencia óptima en la norma más débil

$$\|g - g_h\|_{\beta-d-1} = \mathcal{O}(h^{-\beta+2d+2})$$

es la heredada en los cálculos del potencial.

3.6 Ejemplo

Partiendo de la ecuación (3.22) que reescribimos

$$W_\Gamma \psi + \frac{1}{2} \sigma \psi + \sigma K_\Gamma \psi = u_1 \quad (3.31)$$

podemos parametrizar y tomar

$$g := \psi \circ \mathbf{x}$$

como incógnita y convertir (3.31) en

$$Wg + ag + Bg = f \quad (3.32)$$

siendo W el dado en (3.26),

$$f := |\mathbf{x}'| u_1(\mathbf{x}(\cdot)), \quad a := \frac{|\mathbf{x}'|}{2} \sigma(\mathbf{x}(\cdot)), \quad Bu := |\mathbf{x}'| \sigma(\mathbf{x}(\cdot)) K[|\mathbf{x}'| u]$$

y K es el operador definido en (3.24). Por tanto el núcleo de B es

$$B(s, t) := \frac{\sigma(\mathbf{x}(s)) (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{n}(t)}{2\pi |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2} |\mathbf{x}'(s)| |\mathbf{x}'(t)|$$

La ecuación (3.32) es de orden 1 y es perturbación compacta de una ecuación elíptica en $H^{1/2}$. Recordemos que si V es el operador logarítmico (3.23), se tiene por (3.26)

$$(Wg_1, g_2)_0 = (Vg'_1, g'_2)_0.$$

Si $\sigma \geq 0$ y es no nula en una parte no trivial de la curva Γ , tanto el problema de Robin interior, como la ecuación de frontera (3.31) o su parametrización (3.32) tienen solución única.

Tomamos S_h^1 como espacio discreto para un método de Galerkin para (3.32). Sean $\psi_i \in S_h^1$ las funciones gorro periodizadas

$$\psi_i(s_j) = \delta_{ij} \quad \text{mod } N.$$

Vamos a detallar la implementación para el caso uniforme. Hay que calcular aproximadamente cuatro tipos de términos:

$$(V\psi'_j, \psi'_i)_0, \quad (3.33)$$

$$(a\psi_j, \psi_i)_0, \quad (3.34)$$

$$(B\psi_j, \psi_i)_0, \quad (3.35)$$

$$(f, \psi_i)_0. \quad (3.36)$$

i. Puesto que

$$\psi'_i = \frac{1}{h}(\chi_i - \chi_{i+1}),$$

aproximar términos del tipo primero equivale a aproximar

$$(V\chi_j, \chi_i)_0,$$

lo cual se puede hacer con las estrategias desarrolladas en el Capítulo 2.

ii. Denotamos por

$$\mu(t) = \begin{cases} 1+t, & t \in [-1, 0], \\ 1-t, & t \in [0, 1], \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Consideremos una nueva fórmula de cuadratura no estándar con μ como función peso

$$\int_{-1}^1 p(t)\mu(t)dt \approx \frac{1}{12}p(-1) + \frac{10}{12}p(0) + \frac{1}{12}p(1) =: Lp$$

que es de grado tres. Entonces aproximamos

$$(f, \psi_i)_0 = h \int_{-1}^1 f(s_i + hu)\mu(u)du \approx hLf(s_i + h \cdot).$$

iii. Denotamos por L^2 es la fórmula obtenida por aplicación de L en cada variable, para aproximar una integral sobre el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Entonces consideramos

$$(B\psi_j, \psi_i)_0 = h^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B(s_i + hu, s_j + hv) \mu(u) \mu(v) dudv \approx h^2 L^2 B(s_i + h \cdot, s_j + h \cdot)$$

iv. La matriz $(a\psi_j, \psi_i)_0$ es tridiagonal-cíclica (los elementos son no nulos si $|i - j| \leq 1$ módulo N), ya que el operador de multiplicación por a es el único con carácter local de todos los que aparecen en (3.32). Consideremos las dos siguientes fórmulas de cuadratura

$$\int_{-1}^1 p(t) \mu(t)^2 dt \approx \frac{1}{30} p(-1) + \frac{3}{5} p(0) + \frac{1}{30} p(1) =: L_0 p$$

$$\int_0^1 f(t) \mu(t) \mu(t-1) dt \approx -\frac{1}{120} p(-1) + \frac{11}{120} p(0) + \frac{11}{120} p(1) - \frac{1}{120} p(2) =: L_1 p$$

ambas de grado tres. Entonces aproximamos

$$(a\psi_i, \psi_i)_0 = h \int_{-1}^1 a(s_i + hu) \mu(u)^2 du \approx h L_0 a(s_i + h \cdot)$$

$$(a\psi_{i+1}, \psi_i)_0 = h \int_0^1 a(s_i + hu) \mu(u) \mu(u-1) du \approx h L_1 a(s_i + h \cdot).$$

Análisis. Todo lo anterior se reduce a una aproximación de la formas bilineal y lineal

$$(Wg + ag + Bg, r)_0, \quad (f, r)_0$$

al ser restringidas a S_h^1 . La forma bilineal exacta cumple una condición de Babuška-Brezzi uniforme en S_h^1 , ya que el método de Galerkin es estable. Esta condición se traslada a la forma bilineal aproximada, lo que permite asegurar existencia y unicidad de solución para h suficientemente pequeño. Por último, los órdenes de las reglas de cuadratura son suficientes como para asegurar que se preserve el orden del método de Galerkin en normas débiles

$$\|g - g_h^*\|_{-1} = \mathcal{O}(h^3)$$

y otras propiedades de convergencia nodal del esquema exacto.

En la implementación, que esquematizamos seguidamente, se emplea un vector de índices que permite mantener el carácter cíclico.

```

for  $i = 1 : N$ 
     $\text{ind}(i) = i$ 
 $\text{ind}(0) = N$ 
 $\text{ind}(N + 1) = 1$ 
 $\text{ind}(N + 2) = 2$ 
for  $i = 1 : N$ 
    for  $j = 1 : N$ 
         $v_{ij} \approx (V\chi_j, \chi_i)$           /* Cap 2 */
         $w_{ij} = B(s_i, s_j)$ 
         $f_i = f(s_i)$ 
         $a_i = a(s_i)$ 
    for  $i = 1 : N$ 
         $m_{ii} = h (a_{\text{ind}(i-1)} + a_{\text{ind}(i+1)} + 18a_{\text{ind}(i)}) / 30$ 
         $m_{i,\text{ind}(i+1)} = h (-a_{\text{ind}(i-1)} + 11a_{\text{ind}(i)} + 11a_{\text{ind}(i+1)} - a_{\text{ind}(i+2)}) / 120$ 
         $m_{\text{ind}(i+1),i} = m_{i,\text{ind}(i+1)}$ 
         $d_i = h (f_{\text{ind}(i-1)} + f_{\text{ind}(i+1)} + 10f_{\text{ind}(i)}) / 12$ 
         $c_{-1} = 1/12; c_0 = 10/12; c_1 = 1/12$ 
    for  $i = 1 : N$ 
        for  $j = 1 : N$ 
             $m_{ij} = m_{ij} + h^2 \sum_{k,k'=-1}^1 c_k c_{k'} w_{\text{ind}(i+k), \text{ind}(j+k')}$ 
             $m_{ij} = m_{ij} + (v_{\text{ind}(i), \text{ind}(j)} + v_{\text{ind}(i+1), \text{ind}(j+1)} -$ 
                 $- v_{\text{ind}(i), \text{ind}(j+1)} - v_{\text{ind}(i+1), \text{ind}(j)}) / h^2$ 
    resolver  $\text{Mg} = \mathbf{d}$ 

```

3.7 Cuestiones de unicidad

Un detalle que crea abundantes dificultades en las primeras aproximaciones a los métodos de contorno son los problemas de existencia y unicidad de solución. Dado que los operadores que han aparecido hasta el momento son todos Fredholm de índice cero, se puede asegurar que estos problemas van siempre ligados uno al otro.

Si nos centramos en los seis operadores que aparecen en \mathcal{C}^\pm , esto es,

$$V_\Gamma, \quad W_\Gamma, \quad \frac{1}{2}I \pm K_\Gamma, \quad \frac{1}{2}I \pm K_\Gamma^*$$

la situación se resume fácilmente.

- El núcleo de W_Γ son las funciones constantes y su imagen es el conjunto de las funciones $L^2(\Gamma)$ —ortogonales a las mismas;
- $\frac{1}{2}I + K_\Gamma$ y su traspuesto $\frac{1}{2}I + K_\Gamma^*$ son invertibles.
- El núcleo de $\frac{1}{2}I - K_\Gamma$ son las funciones constantes (esto ya se vio en el capítulo primero, al obtenerse la fórmula $K_\Gamma 1 = 1/2$), luego el núcleo de $\frac{1}{2}I - K_\Gamma^*$ es unidimensional. Se puede tomar una base de este último, normalizando la integral del generador

$$K_\Gamma^* \phi - \frac{1}{2} \phi = 0, \quad \int_\Gamma \phi = 1.$$

La función ϕ recibe el nombre de **distribución de equilibrio**. La imagen de $\frac{1}{2}I - K_\Gamma$ se compone de las funciones f tales que

$$\int_\Gamma f \phi = 0, \tag{3.37}$$

mientras que la de $\frac{1}{2}I - K_\Gamma^*$ son las funciones con integral nula.

- La distribución de equilibrio cumple además que

$$V_\Gamma \phi = \xi \in \mathbb{P}_0.$$

La cantidad $\exp(2\pi\xi)$ se conoce como capacidad logarímicamente o diámetro transfinito de la curva Γ . Si $\xi = 0$, luego la capacidad de Γ es unitaria, V_Γ tiene un núcleo unidimensional generado por ϕ y, por simetría, los elementos de su imagen cumplen (3.37). En todos los casos restantes, V_Γ es invertible.

Los problemas que surjan por la falta de invertibilidad del operador que aparezca en la ecuación integral de frontera deben ser resueltos ya en la formulación. Dicho en general, en los métodos directos, hay existencia de solución (el término independiente cumple las restricciones exigidas para pertenecer a la imagen del operador), ya que la propia solución del problema de contorno nos dice que hay solución de la ecuación integral. No obstante, escoger mal entre distintas soluciones de la ecuación de frontera nos puede llevar a resolver un problema de contorno distinto, con una relación no del todo obvia con nuestro objetivo.

Con los métodos indirectos los problemas suelen proceder de la no existencia de solución, ya que no toda solución de un problema de contorno es expresable como el potencial que queramos. Esto requiere retocar la ecuación añadiendo algún elemento, como las constantes incluidas en la formulación dada en el capítulo segundo. A la hora de escoger solución, cualquiera nos servirá si el problema es interior, mientras que podemos utilizar alguna condición sobre la incógnita para fijar el comportamiento en infinito y determinar una solución concreta de un problema exterior.

Merece la pena, para terminar, comentar qué ocurre con la distribución de equilibrio ϕ . Si la empleamos para definir un potencial de capa simple

$$u := \mathcal{S}_\Gamma \phi = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log |\cdot - \mathbf{x}| \phi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R},$$

observando que

$$u|_\Gamma \equiv \xi, \quad u(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{y}| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{y}|}\right), \quad |\mathbf{y}| \rightarrow \infty$$

se tiene que

$$u|_{\text{int}\Gamma} \equiv \xi$$

(luego el ‘conductor’ cuya frontera ocupa Γ está en equilibrio), mientras que el exterior está ‘cargado’, incluso cuando $\xi = 0$.

Más información

Los operadores de frontera del laplaciano y la proyección de Calderón (aunque a veces tratada de forma implícita sin mención expresa) aparecen en [1, 5, 7, 8, 17, 20, 35] en distintos contextos, hilbertianos o no. Un estudio exhaustivo de los problemas de contorno del laplaciano en distintas formulaciones integrales puede encontrarse en [3, 5, 7, 8, 16, 23, 25]. El tratamiento en espacios de Sobolev periódicos del operador hipersingular se encuentra en [26, 57]. Para referencias sobre el método de Galerkin, léanse las indicaciones dadas en el capítulo que precede. El método totalmente discreto para el problema del ejemplo sgeneraliza ideas del método de Galerkin–colocación. La parte referida al operador hipersingular está tratada en [37], pero el análisis global del método es inédito.

Avisamos al lector de que entre las distintas referencias hay un insistente cambio de signos en los operadores de frontera y en la solución fundamental. Ninguna elección de signos es más consistente que las demás. Unas convienen más a las formulaciones directas y otras simplifican las relaciones de salto. Unas acentúan un cierto carácter de conmutador de las fórmulas de representación y otras prefieren conservar la elipticidad, en lugar de una elipticidad cambiada de signo.

Capítulo 4

Ecuación de Helmholtz y métodos de colocación

4.1 Solución fundamental y operadores

Una muy leve modificación de la ecuación de Laplace conduce a la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{4.1}$$

donde $0 \neq k \in \mathbf{C}$ es tal que $\text{Im } k \geq 0$. Por ejemplo, la amplitud de una onda armónica en tiempo

$$u(\mathbf{x})e^{i\omega t}$$

satisface (4.1) con k dependiente de la frecuencia ω , de los coeficientes de velocidad de ondas en el medio y del amortiguamiento si lo hubiera.

Este operador tiene una bien conocida solución fundamental

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|),$$

que satisface la ecuación

$$\Delta \Phi(\cdot, \mathbf{y}) + k^2 \Phi(\cdot, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}}$$

en sentido de distribuciones. La función $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primer tipo y orden cero

$$H_0^{(1)}(z) := J_0(z) + iY_0(z)$$

donde J_0 es la función de Bessel de orden cero e Y_0 es la correspondiente función de Neumann. Es fácil deducir que

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.2)$$

siendo A y B analíticas. De hecho

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} J_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

y, por tanto, $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2\pi}$. A partir de allí se pueden definir los mismos elementos que en la ecuación de Laplace:

- el potencial acústico de capa simple

$$\mathcal{S}_\Gamma \psi_1 := - \int_\Gamma \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \psi_1(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbf{C},$$

- el potencial de capa doble

$$\mathcal{D}_\Gamma \psi_2 := \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \psi_2(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbf{C},$$

- los cuatro operadores de frontera

$$V_\Gamma \lambda := - \int_\Gamma \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma \longrightarrow \mathbf{C},$$

$$K_\Gamma^* \lambda := \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma \longrightarrow \mathbf{C},$$

$$K_\Gamma \varphi := \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma \longrightarrow \mathbf{C},$$

$$W_\Gamma \varphi := \partial_{\mathbf{n}} \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma \longrightarrow \mathbf{C}.$$

Se recuperan idénticos tipos de expresiones para la representación de los potenciales y las ecuaciones integrales que en la ecuación de Laplace. Por ejemplo, las soluciones de la ecuación en el interior de la curva

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{en } \text{int } \Gamma$$

cumplen la fórmula de representación en función de sus datos de Cauchy

$$u = \mathcal{S}_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} u + \mathcal{D}_\Gamma u|_\Gamma.$$

Los correspondientes límites en la frontera proporcionan las identidades

$$\frac{1}{2}u|_\Gamma = V_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} u|_\Gamma + K_\Gamma u|_\Gamma,$$

$$\frac{1}{2}\partial_{\mathbf{n}} u|_\Gamma = W_\Gamma u|_\Gamma - K_\Gamma^* \partial_{\mathbf{n}} u|_\Gamma.$$

Las fórmulas correspondientes para el exterior, siempre que se satisfagan determinadas restricciones de comportamiento en infinito, se obtienen cambiando el signo por cada aparición de una derivada normal.

Por último, se tienen las relaciones de salto en la frontera de los potenciales

$$(\mathcal{S}_\Gamma \psi_1)^+ = (\mathcal{S}_\Gamma \psi_1)^- = V_\Gamma \psi_1,$$

$$\partial_{\mathbf{n}}^- \mathcal{S}_\Gamma \psi_1 - \partial_{\mathbf{n}}^+ \mathcal{S}_\Gamma \psi_1 = \psi_1,$$

$$\partial_{\mathbf{n}}^- \mathcal{S}_\Gamma \psi_1 + \partial_{\mathbf{n}}^+ \mathcal{S}_\Gamma \psi_1 = -2K_\Gamma^* \psi_1,$$

etc.

Obviamente no hay ningún problema para obtener familias de métodos directos e indirectos para todo tipo de problemas de contorno asociados a la ecuación de Helmholtz. No obstante merece la pena observar algunas diferencias con el caso Laplace:

- El núcleo del operador de capa simple sigue teniendo una singularidad logarítmica ya que en (4.2), $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x} \in \Gamma$. Sin embargo su forma es bastante más complicada, lo cual se traduce en que su versión parametrizada ya no es una simple perturbación del operador de Bessel mediante un operador integral de núcleo indefinidamente diferenciable.
- Los núcleos de K_Γ y K_Γ^*

$$\partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

son continuos en $\Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ (si Γ no tiene esquinas) pero, a diferencia del laplaciano, sus derivadas tangenciales segundas tienen singularidades logarítmicas.

- La ecuación de Helmholtz carece de los problemas de falta de invertibilidad típicas del laplaciano siempre que k no sea un valor propio de $-\Delta$ para el correspondiente problema de contorno interior. La unicidad de solución exterior suele obtenerse mediante la **condición de radiación de Sommerfeld**

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0$$

(con límite uniforme en todas las direcciones). Esta condición tiene una interpretación en cuanto a que Γ represente la frontera de un obstáculo (cilíndrico) que actúa de emisor de la onda o de dispersor (scatterer) de una onda existente.

Veremos el comportamiento de este tipo de problemas con un ejemplo. La mayor complejidad del mismo nos inducirá a utilizar métodos más simples que los de Galerkin.

4.2 Un potencial de capa simple y un método de colocación

Vamos a plantear la resolución del problema de Dirichlet exterior

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{en } \text{ext } \Gamma, \\ u|_{\Gamma} = u_0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \end{array} \right.$$

siendo Γ una curva parametrizable regular. Para ello proponemos una solución obtenida como un potencial de capa simple

$$u = \mathcal{S}_{\Gamma} q : \text{ext } \Gamma \longrightarrow \mathbf{C}, \quad (4.3)$$

donde $q : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ es una distribución de carga acústica por determinar. Automáticamente, gracias al comportamiento de Φ , la condición de radiación de Sommerfeld es satisfecha (básicamente ocurre que planteamos una solución en la que Γ actúa como emisor). Por la continuidad del potencial de capa simple, la ecuación integral de primer tipo

$$V_{\Gamma} q = u_0 \quad (4.4)$$

equivale a que (4.3) cumpla la condición de contorno tipo Dirichlet.

Si $\mathbf{x} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ es una parametrización de Γ en las condiciones habituales y escribimos

$$V(s, t) := -\Phi(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|), \quad (4.5)$$

$$Vg := \int_0^1 V(\cdot, t)g(t)dt,$$

$$f(s) := u_0(\mathbf{x}(s)),$$

$$g(s) := q(\mathbf{x}(s))|\mathbf{x}'(s)|,$$

la fórmula del potencial se reduce a insertar la solución de la ecuación integral periódica

$$Vg = f$$

en la expresión

$$-\int_0^1 \Phi(\cdot, \mathbf{x}(t))g(t)dt : \text{ext } \Gamma \longrightarrow \mathbf{C}.$$

Acudiendo a la descomposición (4.2) se tiene que

$$V(s, t) = A(s, t) \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)| + B(s, t)$$

siendo A, B funciones \mathcal{C}^∞ periódicas, con

$$A(s, t) = -\frac{1}{2\pi} J_0(k|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|), \quad A(t, t) \equiv -\frac{1}{2\pi}.$$

Notemos el cambio de signo efectuado en A y B respecto de (4.2), puesto que el núcleo del operador integral involucra a $-\Phi$ y no a Φ .

Vueltos al marco Sobolev, podemos plantear la descomposición

$$V = \frac{1}{4\pi} \Lambda + V_2,$$

siendo Λ el operador de Bessel y $V_2 : H^r \rightarrow H^{r+3}$ un operador integral más regularizante que V . La invertibilidad de V se reduce a su inyectividad y en tal caso los métodos de Galerkin vistos en capítulos precedentes son estables y convergentes. La falta de inyectividad de V aparece cuando k^2 es un valor propio del laplaciano en el interior de la curva:

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = k^2 u, \quad \text{en } \text{int } \Gamma, \\ u|_\Gamma = 0. \end{array} \right.$$

Volvemos a plantear un mallado

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = 1,$$

denotando $h = \max h_i$ y

$$S_h = \{u_h : (0, 1) \rightarrow \mathbf{C} \mid u_h|_{(s_{i-1}, s_i)} \in \mathbb{P}_0\},$$

el espacio de las funciones constantes a trozos. Acudiendo a las propiedades de V se demuestra que para todo $u_h \in S_h$, Vu_h es una función uniformemente continua y periódica. Tomamos

$$z_i := \frac{s_{i-1} + s_i}{2}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Un método de colocación para la ecuación $Vg = f$ consiste en el esquema discreto

$$\begin{cases} g_h \in S_h, \\ Vg_h(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.6)$$

Su mayor simplicidad no es sólo conceptual (no hay una formulación integrada, dual o variacional como en el Galerkin) sino que se reflejará en el sistema de ecuaciones obtenido y en la reducción del coste computacional.

Si χ_i es la función característica de (s_{i-1}, s_i) , el esquema (4.6) se reduce a la resolución del sistema

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{s_{j-1}}^{s_j} V(z_i, t) dt \right) g_j = f(z_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Algunas consideraciones antes de hablar del error del método:

- Frente al método de Galerkin correspondiente, la matriz del método de colocación exige integrales simples

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{\text{col}} &= \int_{s_{j-1}}^{s_j} V(z_i, t) dt, \\ a_{i,j}^{\text{gal}} &= \int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} V(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Uno de los precios que se paga por la simplicidad es la pérdida de simetría. Esta simetría está en el operador ya que

$$\int_0^1 Vg(s)h(s)ds = \int_0^1 Vh(s)g(s)ds$$

(o bien $V(s, t) = V(t, s)$) y se pierde al no emplearse el segundo proceso de integración típico de un método de Galerkin.

- El dato f tiene que ser evaluable con unas ciertas garantías. Si $f \in H^s$ con $s > 1/2$, por la serie de Fourier de f se ve que es uniformemente continua. Para el método de Galerkin no hace falta esa propiedad

Sorprendentemente, el análisis del error del método de colocación es mucho más complejo que el del método de Galerkin y en bastantes casos está abierto. El problema radica en la demostración de la estabilidad del mismo, propiedad que está garantizada en los métodos de Galerkin. Se han empleado varios procedimientos para afrontar el estudio de la estabilidad y la convergencia del método. Aparte un enfoque matricial, que cubre sólo parcialmente este método (para esta ecuación), una posibilidad fue planteada mediante la conversión de (4.6) en un método de Galerkin para un producto escalar no estándar, aplicando el llamado Lema de Arnold–Wendland. No obstante, este procedimiento no es válido con funciones constantes a trozos. La línea más extendida de análisis ha sido el empleo sistemático de análisis de Fourier. Este procedimiento ha dado muy provechosos frutos, pero plantea dos inconvenientes: requiere que los mallados sean uniformes ($s_i - s_{i-1} = h$) para poder emplear determinadas recurrencias de los coeficientes de Fourier de los elementos de S_h ; además, nada hace pensar que sea extensible al caso tridimensional (salvo en el caso particular de un toro).

Nos limitaremos por tanto a exponer algunas de las propiedades conocidas. Todas ellas se refieren a mallados uniformes:

- Estabilidad $H^0 = L^2(0, 1)$

$$\|g_h\|_0 \leq C \|g\|_0,$$

y convergencia en esta misma norma.

- Órdenes de convergencia

$$\|g_h - g\|_s \leq Ch^{t-s} \|g\|_t \tag{4.7}$$

con $-1 \leq s \leq t \leq 1$, $s < 1/2$ y $-1/2 < t$.

- Superconvergencia en norma débil

$$\|g_h - g\|_{-2} \leq Ch^3 \|g\|_2. \quad (4.8)$$

Nótese que, a diferencia de los métodos Galerkin, en (4.8) se pierde el carácter h^{t-s} de las cotas (4.7);

- Con g suficientemente regular, se tiene superconvergencia nodal

$$\max_i |g(z_i) - g_h(z_i)| = \mathcal{O}(h^2).$$

4.3 Discretización completa

En el caso uniforme ($s_j - s_{j-1} = h$) se puede plantear una aproximación de las integrales

$$a_{ij} := \int_{s_{j-1}}^{s_j} V(z_i, t) dt = \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} V(z_i, t) dt$$

basada en las ideas del método de Galerkin–colocación. Para ello elegimos una función $C \in \mathcal{C}^\infty(D)$

$$D := \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid |s - t| < 1\}$$

tal que $C(s+1, t+1) = C(s, t)$ y

$$C(s, s) = \frac{1}{2}A(s, s)$$

y descomponemos

$$V(s, t) = C(s, t) \log(s - t)^2 + F(s, t).$$

Obviamente $F \in \mathcal{C}(D)$.

Seguidamente realizamos una distribución de índices similar a la del método de Galerkin. Consideramos

$$a_{ij}^{(1)} = \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} F(z_i, t) dt, \quad (4.9)$$

$$a_{ij}^{(2)} = \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} C(z_i, t) \log(z_i - t)^2 dt, \quad (4.10)$$

con índices

$$i = 1, \dots, N, \quad j = i - \frac{N}{2}, \dots, i + \frac{N}{2}. \quad (4.11)$$

Planteamos aproximaciones de (4.9) y (4.10),

$$a_{ij}^{(1)} \approx \alpha_{ij}^{(1)} \quad \text{y} \quad a_{ij}^{(2)} \approx \alpha_{ij}^{(2)},$$

para los índices (4.11). Una vez hecho esto, se repartirán las aproximaciones en la posición correcta de la matriz (módulo N). En el caso de que N sea par, se promediarán las dos posibilidades extremas $\alpha_{i,i \pm N/2}$.

i. Recordemos la fórmula de integración no estándar

$$Lp = \frac{1}{24}p(-1) + \frac{11}{12}p(0) + \frac{1}{24}p(1) \approx \int_{-1/2}^{1/2} p(u)du.$$

Entonces aproximamos

$$a_{ij}^{(1)} = h \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(z_i, z_j + hu)du \approx hLF(z_i, z_j + h \cdot) =: \alpha_{ij}^{(1)}.$$

ii. Por otra parte, para cada par (i, j) calculamos $\Pi_{i,j} \in \mathbb{P}_2$ tal que

$$\Pi_{ij}(z_k) = C(z_i, z_k), \quad k = j-1, j, j+1$$

y aproximamos

$$a_{ij}^{(2)} \approx \int_{z_{j-1}-\frac{h}{2}}^{z_{j+1}+\frac{h}{2}} \Pi_{ij}(z_i, t) \log(z_i - t)^2 dt =: \alpha_{ij}^{(2)}. \quad (4.12)$$

Este valor se puede calcular exactamente. Mostraremos este proceso sistemáticamente más adelante.

Error. Si (α_{ij}) es la matriz aproximada, se plantea el sistema

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} g_j^* = f(z_i) \quad i = 1, \dots, N$$

y la función

$$g_h^* = \sum_{j=1}^N g_j^* \chi_j$$

como aproximación de g_h , la solución por colocación. Entonces se pueden demostrar los siguientes hechos.

- El sistema tiene solución única para h suficientemente pequeño. La idea es estudiar una norma de la diferencia de las dos matrices y utilizar cotas sobre la norma de la inversa de la matriz exacta para trasladarlas a la nueva matriz. Otra opción, esencialmente equivalente a ésta, es escribir la estabilidad del método de colocación en forma de una condición inf-sup (utilizando un espacio de deltas de Dirac como espacio test) y analizando el error de aproximación de las formas bilineales resultantes de este enfoque.
- Se demuestra a la vez que el método es estable en H^0

$$\|g_h^*\|_0 \leq C\|g\|_0.$$

- Para g suficientemente regular, se tiene un óptimo de aproximación entre la solución del método de colocación y su versión con integración numérica

$$\|g_h - g_h^*\|_\infty \leq Ch^3$$

que permite preservar las cotas de convergencia de la colocación.

Implementación. La parte clave es el cálculo de (4.12). Para ello basta notar que podemos escribir

$$\Pi_{ij}(t) = \rho_0 + \rho_1 \left(\frac{t - z_j}{h} \right) + \rho_2 \left(\frac{t - z_j}{h} \right)^2$$

($\rho_0, \rho_1, \rho_2 \in \mathbf{R}$ dependen de i, j) y que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(z_i, z_{j+1}) \\ C(z_i, z_j) \\ C(z_i, z_{j-1}) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Con esto se llega a

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(2)} &= h \int_{-1/2}^{1/2} \Pi_{ij}(z_j + hu) \log(h(j - i + u))^2 du = \\ &= h \left[\rho_0 (\log h^2 + \gamma_{j-i,0}) + \rho_1 \gamma_{j-i,1} + \rho_2 \left(\frac{1}{2} \log h^2 + \gamma_{j-i,2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

siendo

$$\gamma_{k,n} = \int_{-1/2}^{1/2} t^n \log(k + t)^2 dt = (-1)^n \gamma_{-k,n}, \quad n = 0, 1, 2, \quad k \geq 0 \quad (4.15)$$

magnitudes independientes de la situación geométrica y, por tanto, calculables a priori. Más aún, de (4.13) y (4.14) se deduce que, si se emplean las magnitudes

$$\begin{aligned}\eta_{k,0} &= \frac{1}{2}(\gamma_{k,1} + \gamma_{k,2}), \\ \eta_{k,1} &= \gamma_{k,0} - \gamma_{k,2}, \\ \eta_{k,2} &= -\frac{1}{2}(\gamma_{k,1} - \gamma_{k,2}),\end{aligned}$$

se tiene

$$\alpha_{ij}^{(2)} = h \left[\frac{1}{2} \log h (1, 2, 1) + (\eta_{j-i,0}, \eta_{j-i,1}, \eta_{j-i,2}) \right] \begin{bmatrix} C(z_i, z_{j+1}) \\ C(z_i, z_j) \\ C(z_i, z_{j-1}) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Volvemos a escribir

$$c_0 = \frac{11}{12}, \quad c_1 = c_{-1} = \frac{1}{24}.$$

```

for  $i = 1 : N$ 
   $b_i = f(z_i)$ 
for  $i = 1 : N$ 
  for  $j = i - N/2 - 1 : i + N/2 + 1$ 
     $F_{ij} = F(z_i, z_j)$ 
     $C_{ij} = C(z_i, z_j)$ 
  for  $j = i - N/2 - 1 : i + N/2 + 1$ 
     $\alpha_{ij} = h(c_0 F_{i,j} + c_1 F_{i,j+1} + c_{-1} F_{i,j-1}) + (4.16)$ 
if  $N$  par
  for  $i = 1 : N$ 
     $\alpha_{i,i+N/2} = (\alpha_{i,i+N/2} + \alpha_{i,i-N/2})/2$ 
for  $i = 1, N$ 
  for  $j = 1 : \max(1, i - N/2) - 1$ 
     $a_{ij} = \alpha_{i,j+N}$ 
  for  $j = \max(1, i - N/2) : \min(N, i + N/2)$ 
     $a_{ij} = \alpha_{ij}$ 
  for  $j = \min(N, i + N/2) + 1 : N$ 
     $a_{ij} = \alpha_{i,j-N}$ 
resolver  $\mathbf{Ag} = \mathbf{b}$ 

```

El cálculo del potencial se realiza entonces por un procedimiento similar al empleado en el Capítulo 2. El algoritmo deja la posibilidad de escoger la función C en las condiciones indicadas. La opción más simple consiste en tomar

$$C(s, t) \equiv -\frac{1}{4\pi},$$

lo cual además simplifica el cálculo de

$$\alpha_{i,j}^{(2)} = -\frac{h}{4\pi} (\log h^2 + \gamma_{j-i,0}).$$

No obstante, cuando k o el tamaño del objeto son grandes, esto implica realizar una partición de una función que tiende a cero como diferencia de dos que no lo hacen. Esto sugiere el uso de otro tipo de elección de la función C que permita una compensación de estos términos, como por ejemplo

$$C(s, t) = \frac{-1}{4\pi \cosh(k|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|)}.$$

4.4 Potencial mixto

A la hora de presentar la solución del problema interior–exterior

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \\ u|_{\Gamma} = u_0, \end{array} \right.$$

(más condición de Sommerfeld) con un potencial de capa simple

$$\mathcal{S}_{\Gamma}\varphi := -\int_{\Gamma} \Phi(\cdot, \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\gamma(\mathbf{x}),$$

se plantea (sección 2) una ecuación de primer tipo

$$V_{\Gamma}\varphi = u_0.$$

El operador es invertible cuando es **inyectivo**, pero la inyectividad no está garantizada. Veamos cómo intentar probarla. Sea ψ tal que

$$V_{\Gamma}\psi = 0$$

y sea

$$w := \mathcal{S}_{\Gamma}\psi.$$

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w + k^2 w = 0, \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \\ w|_{\Gamma} = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - ikw \right) = 0. \end{array} \right.$$

La unicidad de solución del problema exterior implica que $w \equiv 0$ en el exterior de Γ . Por otra parte, si k^2 no es un valor propio del problema interior de Dirichlet para $-\Delta$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w + k^2 w = 0, \quad \text{en int } \Gamma, \\ w|_{\Gamma} = 0, \end{array} \right. \quad (4.17)$$

tiene solución única $w \equiv 0$ y por tanto V_{Γ} es inyectivo ya que las relaciones de salto conducen a $\psi = \partial_{\mathbf{n}}^- w - \partial_{\mathbf{n}}^+ w \equiv 0$.

En caso contrario, esto es, si k^2 es un valor propio del problema de Dirichlet para $-\Delta$, V_{Γ} no es inyectivo. Para verlo, se toma una solución no trivial de (4.17), luego $\partial_{\mathbf{n}}^- w \neq 0$. La condición de salto ($\psi \equiv \partial_{\mathbf{n}}^- w$) y la continuidad del potencial de capa simple conducen a

$$V_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}}^- w = 0.$$

Para compensar esta falta de inyectividad se pueden plantear distintas técnicas. Nótese que (4.17) tiene soluciones no triviales únicamente para una sucesión

$$0 < k_1^2 < k_2^2 < \dots < k_n^2 < \dots, \quad k_n^2 \rightarrow \infty,$$

siempre en cantidad finito-dimensional. Sin embargo, no es fácil conocer con precisión cuándo se tienen valores propios, por lo que resulta conveniente plantear una representación de la solución que conduzca a una ecuación integral de frontera con solución única.

Así planteamos un potencial mixto

$$u = (\mathcal{S}_{\Gamma} - \eta \mathcal{D}_{\Gamma}) \varphi \quad (4.18)$$

donde $\eta > 0$. Si nos centramos en el problema exterior, la ecuación integral obtenida es

$$\frac{1}{2} \eta \varphi + (-\eta K_{\Gamma} + V_{\Gamma}) \varphi = u_0.$$

Sean entonces

$$\begin{aligned} g(s) &:= \frac{1}{2} \eta \varphi(\mathbf{x}(s)), \\ f(s) &:= u_0(\mathbf{x}(s)), \\ Tg &:= \int_0^1 T(\cdot, t)g(t)dt, \end{aligned}$$

con

$$T(s, t) := 2 \left[\frac{i}{\eta} \Phi(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) - \partial_{\mathbf{n}(t)} \Phi(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) \right] |\mathbf{x}'(t)|.$$

La situación es ahora ligeramente distinta a las obtenidas con la ecuación de Laplace.

La ecuación integral

$$g + Tg = f$$

es de segundo tipo, pero T es un operador integral cuyo núcleo tiene una singularidad logarítmica.

Tomando el espacio de las funciones constantes a trozos S_h como siempre y las ecuaciones del método de colocación,

$$\begin{cases} g_h \in S_h, \\ g_h(z_i) + Tg_h(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

(z_i son, como siempre, los puntos medios de los intervalos) se tienen los siguientes resultados.

- Existencia y unicidad de solución para h suficientemente pequeño.
- Convergencia

$$\|g - g_h\|_s \leq Ch^{t-s} \|g\|_t,$$

con

$$0 \leq s < \frac{1}{2} < t \leq 1.$$

Nótese que no hay posibilidad de dar una noción de estabilidad puesto que $g_h \in H^s$ con $s < 1/2$ y $g \in H^t$ con $t > 1/2$ para ser uniformemente continua.

- Superconvergencia en norma débil

$$\|g - g_h\|_{-1} \leq Ch^2 \|u\|_2.$$

- Superconvergencia nodal

$$\max_i |g(z_i) - g_h(z_i)| = \mathcal{O}(h^2).$$

La discretización completa requiere el cálculo de las integrales

$$\int_{s_{j-1}}^{s_j} T(z_i, t) dt = \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} T(z_i, t) dt,$$

que puede ser realizada con técnicas similares a las de la sección precedente. Como el método es de menor orden (debido al operador, no al espacio discreto), no es necesario utilizar métodos tan precisos. Descomponemos

$$T(s, t) = A_0(s, t) \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)| + B_0(s, t),$$

donde utilizaremos que

$$A_0(s, s) \equiv \frac{-\iota}{\pi\eta} |\mathbf{x}'(s)|.$$

Extraemos seguidamente la singularidad

$$T(s, t) = C(s, t) \log(s - t)^2 + F(s, t),$$

siendo $C \in \mathcal{C}^\infty(D)$ ($D = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid |s - t| < 1\}$) tal que $C(s + 1, t + 1) = C(s, t)$ y $C(s, s) = A(s, s)/2$. Emplearemos una fórmula del punto medio para la parte continua

$$\int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} F(z_i, t) dt \approx hF(z_i, z_j)$$

y una interpolación simple para la singular

$$\begin{aligned} \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} C(z_i, t) \log(z_i - t)^2 dt &\approx C(z_i, z_j) \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} \log(z_i - t)^2 dt = \\ &= hC(z_i, z_j) (\log h^2 + \gamma_{j-i,0}), \end{aligned}$$

con $\gamma_{k,0}$ dadas por (4.15). Como antes, esta tarea se realiza para $|j - i| \leq N/2$ y se reorganizan los cálculos sobre la matriz del sistema.

```

for  $i = 1 : N$ 
     $b_i = f(z_i)$ 
for  $i = 1 : N$ 
    for  $j = i - N/2 : i + N/2$ 
         $F_{ij} = F(z_i, z_j)$ 
         $C_{ij} = C(z_i, z_j)$ 
    for  $j = i - N/2 : i + N/2$ 
         $\alpha_{ij} = h(F_{ij} + C_{ij}(\log h^2 + \gamma_{j-i,0}))$ 
if  $N$  par
    for  $i = 1 : N$ 
         $\alpha_{i,i+N/2} = (\alpha_{i,i+N/2} + \alpha_{i,i-N/2})/2$ 
for  $i = 1, N$ 
    for  $j = 1 : \max(1, i - N/2) - 1$ 
         $a_{ij} = \alpha_{i,j+N}$ 
    for  $j = \max(1, i - N/2) : \min(N, i + N/2)$ 
         $a_{ij} = \alpha_{ij}$ 
    for  $j = \min(N, i + N/2) + 1 : N$ 
         $a_{ij} = \alpha_{i,j-N}$ 
resolver  $\mathbf{A} \mathbf{g} = \mathbf{b}$ 

```

El método preserva las propiedades de convergencia. Por último, la aproximación del potencial mixto (4.18) se realiza con la fórmula del punto medio para cada integral. De nuevo, volvemos a obtener potenciales acústicos puntuales.

Más información

Las aplicaciones de los métodos de contorno a problemas de scattering acústico son abundantes y su tratamiento en la literatura exhaustivo. Como referencia de propiedades de las funciones de Hankel, consúltese [29]. Para formulaciones integrales de problemas de contorno de la ecuación de Helmholtz, véanse [3, 5, 6, 15, 14, 17]. El potencial mixto puede encontrarse, por ejemplo, en [6]. El progresivo análisis de convergencia de los métodos de colocación aparece en diversos artículos, habitualmente en un lenguaje operacional bastante abstracto [30, 31, 45, 47, 48, 51, 52]. Véanse también [19, 22]. Parte de este análisis está recopilado en [5, 23, 27]. Las propiedades de superconvergencia puntual fueron probadas en [33]. Aunque la integración numérica ha sido tratada y analizada de formas diversas [43, 46], el enfoque dado aquí procede de los llamados métodos de colocación completa [32].

Capítulo 5

Nuevos problemas

5.1 Arcos abiertos

La presencia de esquinas en las curvas–frontera o de fracturas en los dominios provoca la aparición de singularidades en las soluciones de las ecuaciones integrales. Nótese que desde el punto de vista de los operadores integrales toda esquina es entrante, ya que lo es a uno de los dos lados y los operadores son los mismos para los problemas interiores y exteriores. Volveremos ligeramente a esta cuestión más adelante.

Las singularidades por la presencia de fracturas son las más marcadas pero resultan más fáciles de determinar si la fractura es regular. Así, sea ahora Γ un arco abierto simple parametrizable por

$$\mathbf{x} : [-1, 1] \longrightarrow \Gamma,$$

con \mathbf{x} regular tal que

$$|\mathbf{x}'(s)| \neq 0, \quad \mathbf{x}(s) \neq \mathbf{x}(t) \quad \text{si } s \neq t.$$

Nos planteamos el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \\ u|_{\Gamma} = u_0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \end{array} \right.$$

que modeliza la dispersión de ondas ante una pantalla cuya sección transversal es Γ .

Proponemos como solución un potencial de capa simple

$$\mathcal{S}_\Gamma \varphi := \frac{i}{4} \int_\Gamma H_0^{(1)}(k|\cdot - \mathbf{x}|) \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbf{C},$$

lo que exige resolver la ecuación

$$V_\Gamma \varphi := \frac{i}{4} \int_\Gamma H_0^{(1)}(k|\cdot - \mathbf{x}|) \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) = u_0. \quad (5.1)$$

La opción directa sería emplear \mathbf{x} y obtener una versión parametrizada

$$\frac{i}{4} \int_{-1}^1 H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}(\cdot) - \mathbf{x}(t)|) g_0(t) dt = u_0(\mathbf{x}(\cdot)),$$

con $g_0(t) := \varphi(\mathbf{x}(t)) |\mathbf{x}'(t)|$. De lo que haremos seguidamente se deduce que aunque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, g_0 tiene singularidades en los extremos, lo cual provoca que los métodos tradicionales den muy pobres resultados de convergencia.

En lugar de \mathbf{x} empleamos una parametrización singular de Γ , $\mathbf{a} : \mathbf{R} \rightarrow \Gamma$, dada por

$$\mathbf{a}(t) := \mathbf{x}(\cos 2\pi t). \quad (5.2)$$

Para todo intervalo de longitud unidad, \mathbf{a} recorre dos veces la curva, una vez en cada sentido. Al llegar a los extremos (corresponden a los valores del parámetro $t \in \mathbf{Z}$ y $t \in 1/2 + \mathbf{Z}$), como

$$\mathbf{a}'(t) = -2\pi \operatorname{sen}(2\pi t) \mathbf{x}'(\cos 2\pi t),$$

la parametrización deviene singular. Así, tomamos

$$g(s) := 2\pi \varphi(\mathbf{a}(s)) |\mathbf{x}'(\cos 2\pi s)| |\operatorname{sen} 2\pi s|, \quad (5.3)$$

$$f(s) := u_0(\mathbf{a}(s)),$$

con lo que (5.1) se convierte en

$$\frac{i}{4} \int_0^{1/2} H_0^{(1)}(k|\mathbf{a}(\cdot) - \mathbf{a}(t)|) g(t) dt = f. \quad (5.4)$$

La ecuación (5.4) corresponde a un único recorrido de la curva. Puesto que f es una función par (al igual que \mathbf{a} y g), (5.4) equivale a

$$Vg(s) := \frac{i}{8} \int_{-1/2}^{1/2} H_0^{(1)}(k|\mathbf{a}(s) - \mathbf{a}(t)|) g(t) dt = f(s), \quad \forall s \in \mathbf{R}. \quad (5.5)$$

Como $H_0^{(1)}(x) = a(x) \log x + b(x)$, el núcleo de (5.5) tiene una doble singularidad logarítmica, ya que

$$\mathbf{a}(s) = \mathbf{a}(t), \quad s \pm t \in \mathbf{Z}.$$

No obstante, empleando la descomposición

$$\begin{aligned} \log |\mathbf{a}(s) - \mathbf{a}(t)|^2 &= \log \frac{|\mathbf{a}(s) - \mathbf{a}(t)|^2}{(\cos 2\pi s - \cos 2\pi t)^2} + \log 4 + \log (\operatorname{sen}^2(\pi(s-t))) + \\ &\quad + \log (\operatorname{sen}^2(\pi(s+t))) \end{aligned} \quad (5.6)$$

y exigiendo que g sea una función par, se puede reescribir V en la forma

$$Vg = \int_0^1 A(\cdot, t) \log (\operatorname{sen}^2(\pi(\cdot - t))) g(t) dt + \int_0^1 B(\cdot, t) g(t) dt,$$

con A, B funciones pares 1–periódicas y C^∞ en ambas variables y

$$A(s, s) \neq 0, \quad \forall s.$$

Todo esto nos lleva a las siguientes conclusiones:

- Resolver (5.4) ó (5.5) equivale a resolver ecuaciones de la forma

$$\int_0^1 A(\cdot, t) \log (\operatorname{sen}^2(\pi(\cdot - t))) g(t) dt + \int_0^1 B(\cdot, t) g(t) dt = f \quad (5.7)$$

con A, B y f pares en cada variable, **buscando soluciones pares** de (5.7).

- Como (5.7) es una ecuación de las estudiadas anteriormente, en caso de que tenga solución, si f es regular, g también lo será. Así, volviendo a (5.3)

$$\varphi(\mathbf{x}(\cos 2\pi s)) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}'(\cos 2\pi s)|} \frac{g(s)}{|\operatorname{sen} 2\pi s|}$$

se deduce que φ tiene singularidades en los dos extremos (correspondientes a los ceros de $\operatorname{sen}(2\pi s)$ en 0 y 1/2). Más aún, deshaciendo el cambio de variable $t = \cos 2\pi s$, cerca de un extremo \mathbf{x}_0 del arco abierto se observa la singularidad

$$\varphi(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}}.$$

- La formulación (5.5) tiene la ventaja de que la incógnita absorbe la singularidad de la parametrización compensándola con la de φ . Así es más simple de aproximar numéricamente.

La teoría de estas nuevas ecuaciones es básicamente la misma que la de las ecuaciones de capítulos precedentes. Construimos los espacios

$$H_e^r := \{u \in H^r \mid \widehat{u}(k) = \widehat{u}(-k)\}.$$

Cuando $r \geq 0$ se tiene el subespacio de H^r formado por las funciones pares

$$H_e^r = \{u \in H^r \mid u(-t) = u(t)\}.$$

Tomamos entonces un mallado $s_i = ih$, con $h = 1/N$ y N par, sobre el que definimos las funciones pares constantes a trozos

$$S_{h,e} = \{u_h \in S_h \mid u_h \text{ par}\},$$

espacio con dimensión $N/2$. Una base de $S_{h,e}$ es

$$\chi_i + \chi_{-i+1} = \chi_i + \chi_{N-i+1}.$$

Se puede plantear el método de colocación

$$\left\{ \begin{array}{l} g_h \in S_{h,e}, \\ Vg_h(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, N/2, \end{array} \right.$$

($z_i := (s_i + s_{i-1})/2$) y se obtienen las mismas cotas que en la sección 4.2.

Apunte. El paso de arcos abiertos regulares a problemas pares vía la parametrización no regular (5.2) está muy relacionado con cuestiones de transformación conforme del exterior de un segmento a una circunferencia. Nótese que en (5.6) se ha extraído la singularidad

$$\log(\cos 2\pi s - \cos 2\pi t)^2$$

correspondiente a (5.2) para un segmento. Con transformaciones de este tipo se pueden reducir los operadores V_Γ , K_Γ , W_Γ (del laplaciano o de la ecuación de Helmholtz) a versiones regularizadas pares.

5.2 Dominios múltiples

El problema exterior a un conjunto de dominios no plantea especiales dificultades a la hora de ser tratado con elementos de contorno. Supongamos que $\Gamma_1, \dots, \Gamma_M$ es un conjunto de curvas regulares sin puntos de contacto. Denotaremos $\Gamma := \cup_j \Gamma_j$.

La solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \\ u|_{\Gamma_j} = u_j, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \end{array} \right.$$

se puede plantear como una suma de potenciales de capa simple

$$u = - \sum_j \int_{\Gamma_j} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}.$$

Si hacemos cada una de las restricciones a las fronteras Γ_i obtenemos operadores

$$V_{\Gamma}^{ij} \varphi_j := - \int_{\Gamma_j} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma_j \longrightarrow \mathbf{C}.$$

Los operadores V_{Γ}^{ii} tienen singularidad logarítmica, pero los operadores V_{Γ}^{ij} , $i \neq j$, son simplemente operadores integrales con núcleo \mathcal{C}^{∞} , correspondientes a la observación en Γ_i de la onda emitida desde Γ_j . Así el sistema

$$\begin{bmatrix} V_{\Gamma}^{11} & V_{\Gamma}^{12} & \cdots & V_{\Gamma}^{1M} \\ V_{\Gamma}^{21} & V_{\Gamma}^{22} & \cdots & V_{\Gamma}^{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{\Gamma}^{M1} & V_{\Gamma}^{M2} & \cdots & V_{\Gamma}^{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}$$

es básicamente un sistema de ecuaciones integrales cuya parte principal (la diagonal) tiene núcleo logarítmico. En su versión parametrizada

$$V^{ij} g_j := \frac{\imath}{4} \int_0^1 H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}_i(\cdot) - \mathbf{x}_j(t)|) g_j(t) dt$$

(con $g_j := \varphi_j|_{\mathbf{x}'_j}$) se obtiene un operador matricial

$$\mathcal{V} : \mathbf{H}^r \longrightarrow \mathbf{H}^{r+1}$$

siendo $\mathbf{H}^r := H^r \times \cdots \times H^r$. El operador \mathcal{V} es Fredholm de índice cero, con parte principal elíptica. Así, si es inyectivo se pueden plantear métodos de Galerkin o colocación estables y convergentes. Las propiedades del caso vectorial no difieren de las del caso escalar.

Las estrategias de tratamiento de arcos abiertos explicadas en la sección precedente son igualmente aplicables. En tal caso, el dato correspondiente a la ecuación sobre el arco es una función par y se debe exigir que la solución correspondiente a ese arco también lo sea.

5.3 Problemas mal puestos

Una idea de formulación en la frontera de la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{en ext } \Gamma, \\ u|_{\Gamma} = u, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \end{array} \right.$$

consiste en lo siguiente. Tomemos Γ_0 una curva regular contenida estrictamente en el interior de Γ . Planteamos allí un potencial de capa simple

$$\mathcal{S}_{\Gamma_0} \varphi := - \int_{\Gamma_0} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}.$$

Como la ecuación de Helmholtz se cumple en el exterior de Γ_0 , obviamente se satisfacen ecuación y condición de Sommerfeld (todos los potenciales acústicos la cumplen). Falta exigir la condición de contorno

$$- \int_{\Gamma_0} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (5.8)$$

Para observar el comportamiento de (5.8), tomemos una versión parametrizada de la ecuación. Sean \mathbf{x}_0 y \mathbf{x} parametrizaciones respectivas de Γ_0 y Γ en las condiciones acostumbradas. Definimos

$$\begin{aligned} g(t) &:= \varphi(\mathbf{x}_0(t)) |\mathbf{x}'_0(t)|, \\ K(s, t) &:= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0(t)|), \\ f(t) &:= u_0(\mathbf{x}(t)). \end{aligned}$$

La ecuación (5.8) se transforma en

$$Kg := \int_0^1 K(\cdot, t) g(t) dt = f, \quad (5.9)$$

ecuación integral de primer tipo. Ahora bien, K es una función \mathcal{C}^∞ y por tanto $Kg \in \mathcal{C}^\infty$, luego para que exista solución es imprescindible que $f \in \mathcal{C}^\infty$. Aún demostrando la unicidad de solución de (5.9) y suponiendo que exista, el problema $Kg = f$ es un típico ejemplo de problema mal puesto. La resolución naïf de (5.9) con métodos de

contorno conduce a soluciones extremadamente inestables. Lo habitual es regularizar el operador y sacrificar parte de la convergencia en pro de la estabilidad. Si denotamos

$$K^*g := \int_0^1 \overline{K(t, \cdot)}g(t)dt,$$

la regularización de Tikhonov de (5.9) es la ecuación de segundo tipo

$$\alpha g_\alpha + K^*Kg_\alpha = K^*f. \quad (5.10)$$

El parámetro $\alpha > 0$ se escoge de forma iterativa con algún criterio, por ejemplo con una minimización de la norma de g_α dentro de unos márgenes de discrepancia:

$$\text{minimizar } \|g_\alpha\| \text{ sujeto a } \|Kg_\alpha - f\| \leq \delta.$$

Las ecuaciones (5.10) son muy simples de discretizar, ya que encajan en el marco del Capítulo 1. Veamos simplemente algunos detalles.

Si empleamos métodos de Galerkin, estamos básicamente resolviendo

$$\alpha(g_h, r_h)_0 + (Kg_h, Kr_h)_0 = (f, Kr_h)_0. \quad (5.11)$$

Las ecuaciones (5.11) con $\alpha = 0$ constituyen el método de mínimos cuadrados para la ecuación $Kg = f$, esto es, un Petrov-Galerkin con S_h como trial y KS_h como test. En la matriz de (5.11) hay que aproximar integrales triples. En el caso de constantes a trozos, son

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K(s, t)\chi_j(t)\overline{K(s, u)}\chi_i(u)dsdtdu = \int_{s_{j-1}}^{s_j} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left[\int_0^1 K(s, t)\overline{K(s, u)}ds \right] dtdu. \quad (5.12)$$

Para el término independiente de (5.11) se requiere aproximar integrales dobles

$$\int_0^1 \int_0^1 f(s)\overline{K(s, t)}\chi_i(t)dsdt = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left[\int_0^1 \overline{K(s, t)}f(s)ds \right] dt.$$

Tomando un mallado uniforme y dividiendo cada ecuación por h llegamos al sistema

$$\alpha g_i + \sum_{j=1}^N \left[h^2 \sum_{k=1}^N \overline{K(z_k, z_i)}K(z_k, z_j) \right] g_j = h \sum_{k=1}^N \overline{K(z_k, z_i)}f(z_k).$$

Apunte. Denotando

$$\mathbf{K} := (K(z_i, z_j)), \quad \mathbf{f} := (f(z_i)), \quad \mathbf{g} := (g_i),$$

el sistema queda escrito en forma matricial

$$(\alpha \mathbf{I} + h^2 \mathbf{K}^* \mathbf{K}) \mathbf{g} = h \mathbf{K}^* \mathbf{f}.$$

Por tanto, se trata de la regularización de Tikhonov de las ecuaciones discretas

$$h \mathbf{K} \mathbf{g} = \mathbf{f},$$

correspondientes a su vez a la discretización naïf de $Kg = f$ por un método de Galerkin (más fórmula de cuadratura). Debido a la simplicidad de la cuadratura empleada, las ecuaciones que se obtendrían del método de colocación y cuadratura del punto medio son las mismas.

5.4 No homogeneidades

Con representaciones de la forma

$$u = - \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \cdot) \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) + \sum_j c_j \Phi(\mathbf{x}_j, \cdot), \quad (5.13)$$

siendo $\{\mathbf{x}_j\}$ un conjunto finito de puntos en $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$, se dan soluciones del problema con fuentes puntuales

$$\Delta u + k^2 u = \sum_j c_j \delta_{\mathbf{x}_j} \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma,$$

con condiciones de Sommerfeld en infinito. El problema de Dirichlet

$$u|_{\Gamma} = u_0$$

se reduce bajo (5.13) a resolver la ecuación integral

$$V_{\Gamma} \varphi = u_0 - \sum_j c_j \Phi(\mathbf{x}_j, \cdot) =: u_0 + u_1,$$

con u_1 regular en Γ .

Más en general, si $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ tiene soporte compacto

$$u := - \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \cdot) \varphi(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) + \int_{\text{sop } f} \Phi(\mathbf{x}, \cdot) f(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x})$$

es una solución de

$$\Delta u + k^2 u = f \quad \text{en } \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$$

con condiciones de Sommerfeld en el infinito. No obstante al pasar a ecuaciones integrales, se requiere evaluar

$$u_2(\mathbf{y}) := \int_{\text{sop } f} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) \quad (5.14)$$

en puntos $\mathbf{y} \in \Gamma$. Si el soporte de f es grande, la ventaja de reducción dimensional de los métodos de contorno se pierde por completo, incluso aunque $\text{sop } f \cap \Gamma = \emptyset$, caso en el que las integrales carecen de singularidad. Para estas situaciones es más conveniente utilizar acoplamientos de elementos finitos y de contorno.

Por último, las fórmulas de representación empleadas en los métodos directos se mantienen con el añadido de términos (5.14).

5.5 Problemas de contorno mixtos

Para culminar este breve repaso a otros tipos de problemas, consideremos un problema de contorno mixto

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{en int } \Gamma, \\ u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \partial_{\mathbf{n}} u|_{\Gamma_N} = u_1, \end{array} \right.$$

siendo $[\Gamma_D, \Gamma_N]$ una partición no trivial sin solapamiento de Γ en dos curvas (o sistemas de curvas, si admitimos que no sea conexa). Nos fijamos en la siguiente identidad que relaciona los datos de Cauchy

$$\frac{1}{2}u|_{\Gamma} = V_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u|_{\Gamma} + K_{\Gamma} u|_{\Gamma}. \quad (5.15)$$

Definimos los operadores integrales:

$$\begin{aligned} V_{DD}\lambda &:= - \int_{\Gamma_D} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma_D \rightarrow \mathbf{C}, \\ V_{DN}\lambda &:= - \int_{\Gamma_D} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma_N \rightarrow \mathbf{C}, \\ V_{ND}\lambda &:= - \int_{\Gamma_N} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma_D \rightarrow \mathbf{C}, \\ V_{NN}\lambda &:= - \int_{\Gamma_N} \Phi(\cdot, \mathbf{x}) \lambda(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) : \Gamma_N \rightarrow \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Es obvio que

$$(V\lambda)|_{\Gamma_D} = V_{DD}\lambda + V_{ND}\lambda, \quad (V\lambda)|_{\Gamma_N} = V_{DN}\lambda + V_{NN}\lambda.$$

Definimos de la misma forma K_{DD}, K_{DN}, K_{ND} y K_{NN} . Tomamos como incógnitas

$$\varphi := u|_{\Gamma_N}, \quad \lambda := \partial_{\mathbf{n}}u|_{\Gamma_D}$$

y de (5.15) deducimos el sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{bmatrix} V_{DD} & K_{ND} \\ V_{DN} & K_{NN} - \frac{1}{2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \varphi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} V_{ND} & K_{DD} - \frac{1}{2}I \\ V_{NN} & K_{DN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}.$$

La discretización de estas ecuaciones es factible por todo tipo de técnicas, pero el análisis matemático de las mismas y el numérico de sus versiones discretas es un asunto mucho más complejo. La razón es que todos los operadores se convierten en operadores sobre arcos abiertos. Desde ese punto de vista V_{DD}, K_{DD}, V_{NN} y K_{NN} no ofrecen mucha novedad, pero los cuatro restantes tiene singularidad en sus núcleos únicamente en los extremos. Más aún, cualquier par de datos (u_0, u_1) no da soluciones regulares, sino que la regularidad de la solución del problema de contorno requiere una cierta compatibilidad. Así se puede pensar mejor en estos problemas como ecuaciones en dominios con esquinas, ya que heredan gran parte de su problemática.

Más información

El cambio de variable del coseno procede de un contexto distinto de ecuaciones integrales singulares [44]. Su aplicación a ecuaciones logarítmicas, incluyendo la teoría correspondiente de espacios de Sobolev pares, aparece en [23, 56, 57]. Sobre adaptaciones de los métodos numéricos al problema, véanse también [33, 50]. Los problemas en dominios múltiples no presentan ninguna complejidad adicional, ya que el análisis de métodos se realiza simultáneamente para ecuaciones y sistemas. Para ejemplos de sistemas de tipo logarítmico, ver [28, 30, 48, 39, 49]. Las aplicaciones de métodos integrales a problemas mal puestos e inversos están tratadas en [6, 14], donde también se introducen las ideas básicas acerca de la regularización de Tikhonov. El tratamiento de no homogeneidades (ver [20] para las fórmulas de representación generales en problemas no homogéneos) mueve casi inmediatamente al acoplamiento de elementos finitos y de contorno [9].

Capítulo 6

Elasticidad y ecuaciones singulares

6.1 Introducción

Las ecuaciones de Laplace y Helmholtz han servido hasta ahora para ilustrar los paralelismos entre dos ejemplos (uno real y otro complejo) en las cuestiones sobre formulaciones en la frontera. Sin salir de los problemas de orden dos, ni de los dominios regulares, hay un comportamiento “nuevo” que ninguno de los casos anteriores exhibe y que es, de hecho, origen de uno de los más interesantes campos de interacción entre análisis matemático, funcional y numérico: las ecuaciones integrales singulares. Éstas surgen de modo natural si intentamos repetir los pasos anteriores con el sistema de Navier–Lamé de la elasticidad lineal homogénea e isotrópica. Este ejemplo clásico da la vuelta a las concepciones tradicionales sobre ecuaciones de frontera y su tratamiento numérico.

En Laplace o Helmholtz se llega a dos tipos de ecuaciones

- ecuaciones de segundo tipo (enfoque clásico) de forma general

$$f + Kf = g, \tag{6.1}$$

siendo K un operador compacto en el espacio adecuado;

- ecuaciones de primer tipo

$$Af = g,$$

donde A es un operador con núcleo débilmente singular (logarítmico) o hipersingular, pero cuya parte principal es elíptica.

Los operadores clásicos llevan a ecuaciones más fáciles de resolver, aunque pierdan más rápidamente sus buenas propiedades si aparecen singularidades en el dominio. Con la elasticidad ocurre algo muy distinto. Las ecuaciones de primer tipo tienen el mismo aspecto y comportamiento que sus homólogas en Laplace y Helmholtz. En cambio, cuando llegamos a ecuaciones como (6.1), la novedad radica en que K ya no es un operador compacto y la teoría clásica de perturbaciones compactas de la identidad no es válida. En su lugar, K adquiere tanta importancia como I y debe ser una compensación entre ambos operadores la que determine el comportamiento de la ecuación.

Otra pequeña complicación antes de entrar en materia: en sintonía con el hecho de que las constantes producen problemas de unicidad en Laplace (básicamente por ser el núcleo del problema de Neumann), la elasticidad bidimensional hace surgir el subespacio tridimensional de los movimientos rígidos, “invisibles” en el problema de tensiones puras (Neumann) para el sistema de Navier–Lamé.

6.2 Ecuaciones y fórmulas

Sea Ω un dominio del plano con frontera regular Γ . La incógnita del problema de la elasticidad bidimensional es un campo de desplazamientos

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

respecto de una posición de equilibrio con tensiones nulas. Asociado a él está un tensor de deformaciones

$$\varepsilon[\mathbf{u}] : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^{2 \times 2}$$

con

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

y, asociado a las deformaciones, un tensor de tensiones

$$\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^{2 \times 2},$$

que en el caso homogéneo e isótropo viene dado por la ley de Hooke

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon) \mathbf{I}_2,$$

en función de dos parámetros μ y λ , llamados parámetros de Lamé. Denotaremos

$$\sigma[\mathbf{u}] = 2\mu \varepsilon[\mathbf{u}] + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}_2$$

a las tensiones en función de los desplazamientos.

El operador de Navier–Lamé es

$$\mathbf{u} \longmapsto \Delta^* \mathbf{u} := \nabla \cdot \sigma[\mathbf{u}] : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2,$$

donde la divergencia se aplica por columnas (o filas, ya que σ es simétrica). Es fácil comprobar que

$$\Delta^* \mathbf{u} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

Las ecuaciones de Navier–Lamé en ausencia fuerzas volumétricas son entonces

$$\Delta^* \mathbf{u} = 0, \quad \text{en } \Omega,$$

con condiciones de contorno en Γ :

- Dirichlet

$$\mathbf{u}|_{\Gamma},$$

- Neumann (tracciones normales)

$$\mathbf{t}_{\Gamma}[\mathbf{u}] := \sigma[\mathbf{u}]|_{\Gamma} \mathbf{n},$$

donde \mathbf{n} es el vector normal exterior.

Las fórmulas de Green para la ecuación de Laplace son sustituidas aquí por las fórmulas de Betti–Somigliana. Antes de mostrarlas introducimos la forma bilineal simétrica

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon[\mathbf{u}] : \varepsilon[\mathbf{v}] = \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon[\mathbf{u}] : \sigma[\mathbf{v}], \end{aligned}$$

siendo “:” el producto de Frobenius de matrices, esto es,

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}.$$

Entonces se tienen las fórmulas de Betti–Somigliana:

- primera:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \int_{\Omega} \Delta^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{v},$$

- segunda:

$$\int_{\Omega} (\Delta^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} (\mathbf{t}_{\Gamma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{\Gamma}[\mathbf{v}]).$$

- Hay una tercera que no es más que una fórmula de representación en la frontera y que introduciremos tras mostrar la solución fundamental.

Apunte. En elasticidad es tradicional utilizar notaciones tensoriales con sumatorios (no indicados explícitamente) sobre índices repetidos. En elasticidad bidimensional, los índices suelen ser letras griegas y variar entre 1 y 2, mientras que en tridimensional suelen ser latinas, variando de 1 a 3. Para lo que necesitamos es más cómodo emplear notaciones vectoriales, en las que se hace más patente el paralelismo con las ecuaciones escalares. La elasticidad lineal bidimensional surge de dos situaciones tridimensionales distintas: desplazamientos planos o tensiones planas. En el segundo caso los parámetros que aparecen en las ecuaciones de Navier–Lamé tienen un significado diferente de los parámetros elásticos del problema tridimensional.

Notemos por último que las funciones

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ arbitrarias (llamadas movimientos rígidos infinitesimales) son solución del problema de Neumann homogéneo

$$\left| \begin{array}{l} \Delta^* \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{t}_{\Gamma}[\mathbf{u}] = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

La solución fundamental, llamada solución de Kelvin, es

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_1 \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mathbf{I}_2 - c_2 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\top}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}$$

con

$$c_1 = \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad c_2 = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}$$

y satisface la ecuación

$$\Delta_{\mathbf{x}}^* \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}} \mathbf{I}_2.$$

Nótese que tomamos siempre los vectores como columnas, por lo cual

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\top} = \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 & (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) & (x_2 - y_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Si definimos

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{t}_{\Gamma, \mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^\top,$$

cálculos laboriosos dan

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \left[d_1 \mathbf{I}_2 + d_2 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right] + \\ &+ d_3 \partial_{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

siendo

$$d_1 = \frac{\mu}{2\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad d_2 = \frac{\lambda + \mu}{\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad d_3 = \frac{\mu}{2\pi(\lambda + 2\mu)}$$

y $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ el vector tangente obtenido por un giro de $\pi/2$ en el sentido de las agujas del reloj a partir del normal exterior $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Fórmula de representación en la frontera. Si

$$\Delta^* \mathbf{u} = 0, \quad \text{en } \Omega$$

y denotamos

$$\mathbf{t} := \mathbf{t}_{\Gamma}[\mathbf{u}] : \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}^2,$$

se tiene en todo $\mathbf{y} \in \Omega$

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = - \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}).$$

El límite en la frontera no difiere mucho del caso laplaciano,

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) = - \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) + \text{v.p.} \int_{\Gamma} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}),$$

con la salvedad de que hemos tenido que añadir un valor principal a la segunda integral por ser singular. Este detalle cambia por completo el comportamiento de todas las ecuaciones en las que aparezca la incógnita dentro de este operador integral singular.

6.3 Operadores de frontera

Los dos potenciales asociados al sistema son

- capa simple

$$\mathcal{S}_\Gamma \mathbf{q} := - \int_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \cdot) \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}),$$

- capa doble

$$\mathcal{D}_\Gamma \mathbf{q} := \int_\Gamma S(\mathbf{x}, \cdot) \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}).$$

A su vez, los operadores de frontera son:

$$V_\Gamma \mathbf{q} := - \int_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \cdot) \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}),$$

$$K_\Gamma \mathbf{q} := \text{v.p.} \int_\Gamma S(\mathbf{x}, \cdot) \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}),$$

$$K_\Gamma^* \mathbf{q} := \text{v.p.} \int_\Gamma S(\cdot, \mathbf{x})^\top \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}),$$

$$W_\Gamma \mathbf{q} := \mathbf{t} \left[\int_\Gamma S(\mathbf{x}, \cdot) \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) \right] = \text{p.f.} \int_\Gamma [\mathbf{t}_y S(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}).$$

Como en el caso del laplaciano, V_Γ es también un operador integral con núcleo logarítmico, luego débilmente singular, y W_Γ es hipersingular. Por contra, K_Γ y K_Γ^* son operadores integrales singulares, luego no compactos. Al parametrizar las ecuaciones, veremos más claramente este hecho. La proyección de Calderón asociada es idéntica a la presentada en el Capítulo 3.

Vamos a centrarnos en una ecuación de la forma

$$\frac{1}{2} \mathbf{q} - K_\Gamma \mathbf{q} = \mathbf{f} \tag{6.2}$$

que surge, por ejemplo, en la formulación directa del problema de Neumann. Tomamos la habitual parametrización de Γ y denotamos

$$\mathbf{g}(s) := \mathbf{q}(\mathbf{x}(s)).$$

Entonces (6.2) se convierte en la ecuación

$$\frac{1}{2} \mathbf{g}(s) + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \text{v.p.} \int_0^1 \mathbf{K}_p(s, t) \mathbf{g}(t) dt + \int_0^1 \mathbf{K}_\Gamma(s, t) \mathbf{g}(t) dt = \mathbf{f}(s)$$

siendo

$$\mathbf{K}_p(s, t) = \frac{(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)) \cdot \boldsymbol{\tau}(t)}{2\pi |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2} |\mathbf{x}'(t)| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

($\boldsymbol{\tau}(t)$ es la forma parametrizada en $\boldsymbol{x}(t)$ del citado vector tangente) y $\mathbf{K}_\Gamma(s, t)$ una matriz de funciones \mathcal{C}^∞ .

Es fácil ver que

$$A(s, t) = \frac{(\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{\tau}(t)}{2\pi |\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(t)|^2} |\boldsymbol{x}'(t)| (1 - e^{2\pi i(s-t)})$$

es una función \mathcal{C}^∞ con límite

$$A(s, s) = \pm i$$

dependiendo del sentido de recorrido de la curva. Así, podemos reconducir la ecuación a la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{g}(s) \pm \frac{\mu i}{2(\lambda + 2\mu)} \text{v.p.} \left[\frac{1}{i} \int_0^1 \text{ctg}(\pi(s-t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{g}(t) dt \right] + \\ + \int_0^1 \mathbf{K}_\Gamma^{(2)}(s, t) \mathbf{g}(t) dt = \mathbf{f}(s), \end{aligned}$$

con una nueva matriz de funciones \mathcal{C}^∞ , $\mathbf{K}_\Gamma^{(2)}$.

El operador

$$Hg := \frac{1}{i} \text{v.p.} \int_0^1 \text{ctg}(\pi(t - \cdot)) g(t) dt$$

es la transformada de Hilbert periódica. Su expresión Fourier,

$$Hg = \sum_{k>0} \widehat{g}(k) \phi_k - \sum_{k<0} \widehat{g}(k) \phi_k, \quad (6.3)$$

desvela su imposibilidad para ser compacto (ya que $g \rightarrow Hg + \widehat{g}(0)$ es un isomorfismo en L^2) y además da idea de un comportamiento radicalmente opuesto a la elipticidad, con el operador dividiendo el espectro en una zona donde es definido positivo y otra donde es definido negativo. De todos modos es obvio que

$$H : H^r \rightarrow H^r$$

es continuo para todo r . Un sistema de la forma

$$\mathbf{A}g + \mathbf{B}Hg + \mathbf{K}g = \mathbf{f} \quad (6.4)$$

con \mathbf{K} operador compacto y \mathbf{A}, \mathbf{B} matrices de funciones, se denomina **sistema integral singular**. En nuestro caso \mathbf{A} y \mathbf{B} son constantes

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{B} = \pm \frac{\mu i}{2(\lambda + 2\mu)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si denotamos $\nu = \mu/(\lambda + 2\mu) \in (0, 1)$, por las condiciones habituales sobre los parámetros de Lamé, podemos demostrar que

$$(\mathbf{A}\mathbf{g}, \mathbf{g})_0 + (\mathbf{B}H\mathbf{g}, \mathbf{g})_0 \geq \gamma \|\mathbf{g}\|_0^2;$$

con γ dependiente de ν . Por tanto, aunque no se puede entender la ecuación como una perturbación compacta de la identidad (una ecuación de segundo tipo), sí tenemos en este caso que el operador de (6.4) es una perturbación compacta de un operador elíptico ($\mathbf{A}\mathbf{I}_2 + \mathbf{B}H$). Esto es suficiente para poder aplicar métodos de Galerkin y de colocación con garantías de estabilidad.

Los resultados de convergencia son los mismos que para ecuaciones de segundo tipo. No obstante, hay que tener bastante cuidado con cuestiones de falta de unicidad provocados por los movimientos rígidos.

6.4 Ecuaciones integrales singulares

La sección anterior nos ha permitido introducir un sistema de ecuaciones integrales singulares, con la facilidad adicional de ser elíptico, lo cual asegura buenas propiedades de estabilidad para los métodos numéricos tradicionales. No obstante, incluso con una única ecuación singular

$$Ag := ag + bHg + Kg = f, \quad (6.5)$$

(a y b son funciones regulares, H es la transformada de Hilbert y K es un operador compacto), las cuestiones de cuándo los métodos de Galerkin y colocación son estables llegan a acumular bastantes dificultades.

La ecuación anterior se puede reescribir en una forma más cercana al espíritu de la literatura sobre operadores integrales singulares. Introducimos los operadores

$$Pg := \sum_{k \geq 0} \hat{g}(k) \phi_k, \quad Qg := g - Pg = \sum_{k < 0} \hat{g}(k) \phi_k,$$

que son dos proyecciones complementarias ortogonales

$$P + Q = I, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \quad PQ = QP = 0.$$

Además, por (6.3) se tiene la relación

$$Pg - Qg = Hg + \int_0^1 g(t)dt.$$

Así, con $c = a + b$ y $d = a - b$, la ecuación (6.5) es equivalente a

$$cPg + dQg + \tilde{K}g = f,$$

siendo \tilde{K} compacto.

Si c y d no se anulan, el operador anterior es de Fredholm, pero su índice

$$\dim(\ker A) - \text{codim}(\text{Im } A)$$

puede no ser nulo. De hecho el índice del operador es igual al número de vueltas que da alrededor del origen en el plano complejo la curva

$$t \longmapsto \frac{c(t)}{d(t)}.$$

Este índice es no nulo en bastantes ecuaciones interesantes, como la clásica *airfoil equation*, relacionada con el flujo alrededor de un perfil de ala de avión. Las dificultades de encontrarse con una descompensación entre existencia y unicidad de solución se reflejan severamente en el numérico.

Aparte de esto, la ecuación puede exhibir un comportamiento que se ha venido en llamar imparmente elíptico (traducción de *oddly elliptic*, que significa además extrañamente elíptico). Una ecuación de la forma

$$Hg + Kg = f$$

es un típico ejemplo de este efecto, donde el operador de la parte principal tiene una ‘mitad’ definida positiva y la otra definida negativa. Los métodos de Galerkin tienen una marcada aversión a estos operadores y, sorprendentemente, las estrategias de posicionamiento de buenos nodos en los métodos de colocación son casi opuestas a la de los operadores elípticos tradicionales.

Más información

Las aplicaciones de los métodos de contorno a problemas de elasticidad están en el fondo del gran empuje de los mismos en las últimas décadas. Para revisar las múltiples formulaciones

posibles y cuestiones teóricas, ver, por ejemplo [5, 7, 17, 16, 18]. En [3] se puede además consultar una extensa bibliografía sobre el tema. En [30, 48] se reescriben varios de los problemas en el contexto de ecuaciones pseudodiferenciales. Para una breve introducción a las ecuaciones integrales singulares y a la transformada de Hilbert periódica, ver [14, 26]. Las referencias obligadas en teoría y numérico de ecuaciones integrales singulares son [19, 22].

Capítulo 7

En el tintero

Los capítulos precedentes han intentado dar una idea general de formulaciones y métodos numéricos para ecuaciones integrales de frontera basándose en ejemplos simples, donde se han eliminado no pocas dificultades habituales en la práctica. Dedicamos estas últimas secciones a dar unas breves pinceladas de todo lo que no se ha comentado aquí.

7.1 Otros problemas bidimensionales

Más ecuaciones y más soluciones fundamentales. Las aplicaciones de los métodos de contorno a problemas de la elasticidad son muy numerosas, incluso en el caso bidimensional. Mucho del esfuerzo se realiza en buscar buenas formulaciones, que lleven a ecuaciones o sistemas con solución única, carácter elíptico o allegado y operadores integrales manejables.

En el caso del bilaplaciano se pueden repetir muchas de las ideas del laplaciano pero aparecen nuevas complicaciones. Los datos de Cauchy del bilaplaciano no son un sistema tan lógicamente ordenado como tradicionalmente se obtiene en ecuaciones de orden dos, aunque en estos haya de hecho la posibilidad de elegir entre distintas posibilidades.

En los problemas asociados al bilaplaciano (como los modelos de placa de Kirchhoff) surgen habitualmente derivadas tangenciales en las condiciones de frontera. De aquí arranca una necesidad de generalizar (abstraer) bastantes de las ideas sobre formulaciones. Los conceptos que hay que entender y revisar son:

- El conjunto de condiciones de contorno sobre el que nos centraremos, lo que recibe el apelativo de un sistema de Dirichlet. Uno simple, pero no siempre conveniente, para el bilaplaciano es

$$u|_{\Gamma}, \quad \partial_{\mathbf{n}}u|_{\Gamma}, \quad \Delta u|_{\Gamma}, \quad \partial_{\mathbf{n}}\Delta u|_{\Gamma}.$$

- La idea de forma bilineal asociada al operador diferencial y cómo esta interactúa con el sistema de Dirichlet en función de fórmulas de conmutación o reciprocidad. En el laplaciano, tenemos las fórmulas de Green, en la elasticidad, las de Betti–Somigliana y en el bilaplaciano, las de Rayleigh–Green. Todos ellos son casos ‘simétricos’ tanto en el operador como en las condiciones de contorno exigidas. En general, al sistema de Dirichlet escogido se le asocia otro sistema de Dirichlet que hace de dual en estas fórmulas.
- La idea de solución fundamental y su aplicación en las fórmulas de reciprocidad (Green generalizadas) para dar las fórmulas de representación en la frontera y las identidades en la frontera correspondientes (proyección de Calderón).
- Los potenciales multicapa asociados a operador, solución fundamental y sistema de Dirichlet y sus relaciones de salto en la frontera.
- Las condiciones de radiación naturales referidas a problemas exteriores.

Otro problema donde se han aplicado repetidamente formulaciones de contorno es el sistema de Stokes. Su solución fundamental es una matriz funcional tres por dos y revela cómo la conceptualización anterior debe ser adaptada para cada tipo de sistemas diferenciales. Entre los problemas evolutivos, la ecuación del calor ha recibido mucha atención en sus formulaciones integrales.

Por último, en muchas ocasiones se buscan soluciones fundamentales complicadas que se apliquen en un semiplano, en el exterior de una circunferencia, etc e incluyan algún tipo de condición de contorno adicional.

Cerca de la frontera. Las fórmulas de representación y los potenciales son difíciles de evaluar cerca de la frontera. Si pensamos en un potencial de capa simple

$$u(\mathbf{x}) := - \int_{\Gamma} \log |\mathbf{y} - \mathbf{x}| q(\mathbf{y}) d\gamma(\mathbf{y})$$

y sustituimos q por una discretización q_h , la evaluación de esta expresión cuando \mathbf{x} está cerca de Γ tiene singularidades espúreas que dificultan enormemente los cálculos. La opción cuando se quiere trabajar cerca de la frontera es utilizar desarrollos de Taylor en la dirección normal partiendo de la frontera:

$$u(\mathbf{x} + \xi \mathbf{n}) = u(\mathbf{x}) + \xi \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) + \frac{\xi^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^2 u(\mathbf{x}) + \dots \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Para las distintas derivadas normales de la solución del problema de contorno se resuelven ecuaciones integrales asociadas, utilizando progresivamente las soluciones aproximadas de las precedentes. Este enfoque tiene la ventaja de que cuanto más cerca se esté de la frontera, más preciso es.

Dominios con esquinas. Restringidos de nuevo al laplaciano la presencia de esquinas en la frontera provoca varias novedades. Los operadores que menos sufren la existencia de esquinas en el dominio son el logarítmico y el hipersingular, que no pierden su carácter eminentemente elíptico. Por ejemplo, en el caso de V_{Γ} se puede llegar incluso a dar un descomposición

$$V_{\Gamma} = \Lambda + K_0 + K_1$$

donde K_1 es compacto y K_0 es una perturbación de norma pequeña en comparación con la inversa de la parte “principal” Λ . Este tipo de perturbaciones preservan la estabilidad de los métodos de Galerkin y de algunos otros métodos de proyección no apoyados directamente en la elipticidad.

No obstante, gran parte del análisis numérico debe realizarse con técnicas muy distintas a las aquí empleadas. Por un lado, uno puede esperar soluciones con singularidades en las esquinas y, por otro, desde el punto de vista de una parametrización, incluso una función C^{∞} sobre una curva no pasa de ser una función C^{∞} a trozos. Tanto la teoría existente como la experiencia práctica aconsejan realizar fuertes refinamientos del mallado cerca de las esquinas, en función del tipo de singularidad esperable.

Los operadores K_{Γ} y K_{Γ}^* cambian por completo de aspecto y funcionalidad. El problema principal es que en las esquinas sus núcleos tienen singularidades no integrables, luego hace falta introducir un valor principal, pero esta modificación es únicamente necesaria allí, luego no son operadores integrales singulares. Los operadores $\frac{1}{2}I \pm K_{\Gamma}$

admiten de nuevo descomposiciones en parte compacta más parte pequeña, básicamente procedente de aislar la parte más incómoda de las esquinas. Estos efectos aislados de esquinas introducen una nueva clase de operadores llamados operadores de convolución de Mellin. La citada descomposición permite aplicar métodos de Galerkin con garantías de estabilidad.

La teoría de los métodos de colocación en dominios con esquinas va poco a poco llegando a un estado satisfactorio, pero aún quedan muchas cuestiones abiertas y la duda de si habrá una sistemática de análisis conjunto de estos métodos.

La presencia de esquinas en los dominios donde se consideran ecuaciones singulares o el hecho de que los coeficientes (a y b) sean funciones regulares a trozos introducen nuevos elementos a estudio, muchos de los cuales han sido ya abordados en una abundante y compleja literatura sobre teoría y numérico de ecuaciones singulares.

Otros métodos. La última década ha visto impulsados varios nuevos métodos numéricos para ecuaciones integrales de frontera bidimensionales. Entre ellos hay dos familias que han producido un buen número de publicaciones y han despertado el interés por sus propiedades y por la claridad de su análisis. La primera es la cualocación (traducción del inglés *qualocation*, término maletín de *quadrature modified collocation*), con la simplicidad de un método de colocación y las casi óptimas propiedades de convergencia de un Galerkin. La segunda familia es la de los métodos de cuadratura, donde se retoman viejas ideas de los métodos de Nyström y se aplican a ecuaciones integrales cuyos núcleos tiene singularidades fuertes o débiles.

Los métodos, ya sean de Galerkin como de colocación, basados en los polinomios trigonométricos tienen propiedades de convergencia prácticamente inmejorables y corresponden en este mundo a los métodos espectrales para problemas de contorno. No obstante, requieren un gran esfuerzo de cuadratura numérica y su uso es muy restringido.

Estimaciones a posteriori del error. Una aplicación seria de los métodos de contorno exige la posibilidad de realizar estimaciones a posteriori del error cometido. En este tipo de objetivos se incluyen las técnicas de extrapolación de Richardson que, utilizando varios mallados, permiten acelerar la convergencia de los métodos y estimar

el error, siguiendo un conocido esquema triangular de eliminación de términos de un desarrollo del error.

7.2 El salto a la tercera dimensión

Los verdaderos retos para los próximos años están en los problemas tridimensionales. Dado que las formulaciones de frontera conducen a ecuaciones integrales sobre superficies, los métodos de contorno ofrecen una atractiva reducción dimensional que puede ser aprovechada, ya sea en solitario, ya sea en combinación con elementos finitos.

La teoría de métodos de Galerkin para ecuaciones de frontera está basada en conceptos de elipticidad y en propiedades de los operadores, luego es esencialmente independiente de la dimensión. Por esta razón, desde un punto de vista analítico, los primeros pasos son automáticos. Cuestiones que surgen rápidamente son:

- El tamaño de los sistemas lineales resultantes, con matrices llenas y mal condicionadas.
- La necesidad de automatizar una integración numérica para funciones débilmente singulares, singulares o hipersingulares. Nótese que las integrales para un método de Galerkin son cuádruples.
- La necesidad de comprimir o eliminar información numérica poco relevante.

Todo ello ha producido una explosión de ideas y aplicaciones de técnicas numéricas novedosas como las estrategias de *panel clustering*, el uso de *wavelets* y bases jerarquizadas, el renovado interés por la integración numérica multidimensional, etc.

Los métodos de tipo colocación son mucho más aplicados, de nuevo por la simplicidad conceptual y, ahora sí, por la reducción del número de integrales por evaluar o aproximar. Sin embargo, salvo en dominios simples y con ecuaciones concretas, el análisis de estabilidad de métodos de colocación para ecuaciones integrales de frontera en superficies es una asignatura pendiente.

Más información

Las formulaciones para la ecuación biarmónica, el problema de Stokes y la transferencia de calor se pueden consultar en [3, 5, 16, 36]. El tratamiento cerca de la frontera y otros temas

novedosos de compresión de información para el caso tridimensional aparecen en [2, 11] por ejemplo.

Las descomposiciones de operadores de frontera del laplaciano cerca de esquinas se pueden encontrar en [1, 14, 57]. Para técnicas basadas en operadores de tipo Mellin, ver [22].

Los métodos de cualocación y cuadratura han producido muy abundante literatura numérica en la última década. Ver [24, 25] para las ideas básicas sobre los mismos. La aplicación de extrapolación de Richardson a métodos de contorno está en el núcleo de la dedicación de los autores de este curso [32, 33, 34, 37, 49]. Otro enfoque se puede encontrar en [47].

Los problemas tridimensionales ocupan un número de referencias si cabe más amplio que los bidimensionales. Consultar la bibliografía de [1, 3, 16] para formulaciones y discretizaciones.

Palabras finales

Muchos puntos de vista confluyen en la teoría y aplicación de los métodos de contorno. Sus posibilidades prácticas son múltiples y la capacidad de combinarlos con elementos finitos ha generado un tipo de técnicas que, muy probablemente, perdurarán en los códigos para simulación numérica de los años venideros.

Para quienes disfrutan de las matemáticas aplicadas, los elementos de contorno ofrecen un apasionante mundo de convergencia entre análisis matemático tradicional, teoría de operadores y un variado abanico de técnicas en análisis numérico. El hecho de que quede tanto por hacer y la certeza de que se habrán de aplicar ideas nuevas para atacar cuestiones abiertas generan una expectativa de estudio y trabajo interesante para mucho tiempo.

Complementos

Operadores compactos. Sean V y W dos espacios de Hilbert. Decimos que $K : V \rightarrow W$ es compacto si la imagen de una sucesión débilmente convergente en V es fuertemente convergente en W .

Es obvio que si $K_1, K_2 : V \rightarrow W$ son compactos y $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$,

$$\lambda K_1 + \mu K_2$$

es compacto. Si (K_n) es una sucesión de operadores compactos $V \rightarrow W$ y

$$\|K - K_n\| \rightarrow 0$$

(en norma de operadores), el límite K también es compacto. Por último si $K : V \rightarrow W$ es compacto y $A : W \rightarrow Z$, $B : U \rightarrow V$ son continuos, entonces KB y AK también son compactos.

Trasposición. Si $A : V \rightarrow V$ es lineal y continuo, llamaremos $A^* : V \rightarrow V$ al único operador que cumple

$$(Au, v) = (u, A^*v), \quad \forall u, v \in V, \quad (1)$$

donde (\cdot, \cdot) es el producto escalar de V . Si se tiene $A : V \rightarrow V^*$, se puede definir $A^* : V \rightarrow V^*$ con la fórmula

$$(Au, v) = \overline{(A^*u, v)}, \quad \forall u, v \in V, \quad (2)$$

donde ahora $(\cdot, \cdot) : V^* \times V \rightarrow \mathbf{C}$ es el producto de dualidad. Entonces, si $K : V \rightarrow V$ (ó $K : V \rightarrow V^*$) es compacto, K^* también es compacto.

Operadores de segundo tipo. Un operador

$$I + K : V \longrightarrow V,$$

donde I es la identidad y K es compacto, se dice operador de segundo tipo. Los operadores de segundo tipo cumplen la alternativa de Fredholm:

- o bien $I + K$ e $I + K^*$ tienen inversa continua,
- o bien

$$0 < \dim \ker(I + K) = \dim \ker(I + K^*) < \infty$$

y

$$\operatorname{im}(I + K) = \ker(I + K^*)^\perp,$$

$$\operatorname{im}(I + K^*) = \ker(I + K)^\perp$$

(el símbolo \perp denota ortogonalidad en el espacio de Hilbert V).

Lo anterior se puede ver directamente sobre una ecuación

$$u + Ku = f. \tag{3}$$

Si $I + K$ no es inyectivo, entonces

$$\ker(I + K) = \operatorname{span}\langle \phi_1, \dots, \phi_d \rangle,$$

$$\ker(I + K^*) = \operatorname{span}\langle \phi_1^*, \dots, \phi_d^* \rangle$$

y (3) tiene solución única módulo $\ker(I + K)$ si y sólo si

$$(f, \phi_i^*) = 0 \quad i = 1, \dots, d.$$

Por tanto $\operatorname{im}(I + K)$ tiene un suplementario finito dimensional con la misma dimensión que $\ker(I + K)$.

Operadores de Fredholm de índice cero. Si $A : V \rightarrow W$ cumple

- $\text{im } A$ es cerrado
- $\dim(\ker A) = \text{codim}(\ker A)$

se dice que A es Fredholm de índice cero (la codimensión de $\text{im } A$ es la dimensión de cualquier suplementario de $\text{im } A$). Los operadores de segundo tipo $I + K$ son Fredholm de índice cero.

Más aún, si A es Fredholm de índice cero (luego entre otras cosas A es inyectivo si y sólo si es biyectivo) y K es compacto, $A + K$ es Fredholm de índice cero. Además se tiene una adaptación del teorema de la alternativa a estos operadores.

Operadores elípticos. Si $A : V \rightarrow V^*$ (ó $A : V \rightarrow V$) cumple

$$\text{Re}(Au, u) \geq \gamma \|u\|^2, \quad \forall u \in V$$

con $\gamma > 0$ se dice que A es elíptico. El teorema de Lax–Milgram afirma que todo operador elíptico es invertible con inversa continua. Si K es compacto y A es elíptico, $A - K$ es Fredholm de índice cero. En este caso $B = A - K$ cumple

$$\text{Re}(Bu, u) \geq \gamma \|u\|^2 - (Ku, u). \quad (4)$$

Las desigualdades de tipo (4) se enmarcan dentro de las llamadas desigualdades de Gårding.

Métodos de Galerkin. Sea $A : V \rightarrow V$ (ó $A : V \rightarrow V^*$) es lineal, continuo e invertible. Consideremos la ecuación

$$Au = f.$$

Sea $V_h \subset V$ un subespacio finito dimensional. Un método de Galerkin es un esquema discreto

$$\left| \begin{array}{l} u_h \in V_h, \\ (Au_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (5)$$

Si se tiene una sucesión de espacios $\{V_h\}_{h>0}$, de dimensión creciente cuando $h \rightarrow 0$, se pueden considerar tres conceptos:

- propiedad de aproximación

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad \forall u \in V; \quad (6)$$

- estabilidad: para h suficientemente pequeño (5) tiene solución única y

$$\|u_h\| \leq C\|u\| \quad (7)$$

con C independiente de h ;

- convergencia: para h suficientemente pequeño (5) tiene solución única y

$$\|u_h - u\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Es fácil ver que la estabilidad equivale a la estimación de Céa

$$\|u - u_h\| \leq C' \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

De ahí se deduce sin demasiada dificultad que para métodos de Galerkin,

$$\begin{array}{ccc} \text{estabilidad} & & \\ + & \iff & \text{convergencia.} \\ \text{prop. aproximación} & & \end{array}$$

Si A es elíptico, la estabilidad está garantizada y, por tanto, la convergencia se limita a la propiedad de aproximación (6).

Además, si $A = A_0 - K$, con A_0 elíptico y K compacto, es inyectivo (luego invertible) la convergencia del método para A_0 implica la convergencia del método para A . Por último, la estabilidad admite la forma de una condición ínfimo-supremo (Babuška–Brezzi)

$$\inf_{u_h \in V_h} \left[\sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{|(Vu_h, v_h)|}{\|u_h\| \|v_h\|} \right] \geq \beta > 0.$$

Métodos de proyección. Gran parte de estas ideas se pueden extender a métodos de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h \in V_h, \\ P_h A u_h = P_h f, \end{array} \right. \quad (8)$$

donde $P_h : V^* \rightarrow W_h$ (ó $P_h : V \rightarrow W_h$) es un operador de proyección y

$$\dim W_h = \dim V_h.$$

Estos operadores reciben el nombre de operadores de proyección, ya que la aplicación

$$u = A^{-1}f \quad \longmapsto \quad u_h,$$

dada por $u_h = (P_h A)^{-1} P_h A u$, es una proyección. El espacio W_h es un espacio “artificial” en el que reflejar la discretización.

Por ejemplo, métodos de tipo colocación

$$A u_h(z_i) = f(z_i)$$

son equivalentes a expresiones como (8) si P_h es un operador de interpolación en los puntos z_i sobre un espacio “artificial” W_h .

Generalizaciones del concepto de integral. Sea una función $f : [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f \in \mathcal{C}([-a, a] \setminus \{0\})$. Si podemos acotar

$$|f(s)| \leq C|s|^\alpha,$$

con $\alpha > -1$, se dice que la función f es débilmente singular (este concepto se generaliza obviamente a un número superior de singularidades aisladas). En tal caso f es integrable en el sentido de Riemann impropio y en el de Lebesgue. A veces, con singularidades más fuertes, la cantidad

$$\text{v.p.} \int_{-a}^a f(s) ds := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-a}^{-\varepsilon} f(s) ds + \int_{\varepsilon}^a f(s) ds \right],$$

llamada valor principal de Cauchy de la integral, es convergente sin que la integral lo sea. En tal caso, se habla simplemente de una integral singular de f . Si f cumple que

$$\exists \lim_{s \rightarrow 0} s^2 f(s) =: f_0,$$

se puede definir

$$\text{p.f.} \int_{-a}^a f(s) ds := \text{v.p.} \int_{-a}^a \frac{s^2 f(s) - f_0}{s^2} ds.$$

La expresión anterior recibe el nombre de parte finita de Hadamard de la integral. Por ejemplo, si f admite un desarrollo de Laurent

$$f(s) = \frac{f_0}{s^2} + \frac{f_1}{s} + f_2(s),$$

entonces

$$\text{p.f.} \int_{-a}^a f(s) ds := \int_{-a}^a f_2(s) ds,$$

luego la parte finita elimina la parte divergente de la función, desde el punto de vista de la integrabilidad. Este concepto se generaliza similarmente a singularidades más fuertes. Si no existe el valor principal de la integral pero existen partes finitas de algún tipo, se habla de integrales hipersingulares. Este tipo de ideas se trasladan fácilmente a integrales sobre curvas parametrizables en el plano.

Bibliografía

- [*] **Libros y surveys.** Listamos algunos libros y artículos que revisan la teoría de formulaciones y numérico de elementos de contorno. Se incluyen varias monografías sobre ecuaciones integrales que, por su contenido, orientan hacia estos temas.
- [1] K. E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [2] K.E. Atkinson y Y. Xu, eds., *Numerical treatment of boundary integral equations*. Adv. Comput. Math. 9 (1998), Baltzer Science Publishers BV, Bussum, 1998.
- [3] M. Bonnet, *Boundary Integral Equations Methods for Solids and Fluids*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [4] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles y L.C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, 1984.
- [5] G. Chen y J. Zhou, *Boundary Element Methods*, Academic Press, 1992.
- [6] D. Colton y P. Kress, *Integral Equations Methods in Scattering Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [7] Ch. Constanda, *Direct and indirect boundary integral equation methods*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 107, Chapman & Hall, 2000.
- [8] M. Costabel, *Principles of boundary element methods*. En: *Finite elements in physics (Lausanne, 1986)*, R. Gruber, ed. (pp. 243–274) North-Holland, Amsterdam-New York, 1987.

- [9] G. Gatica y G. Hsiao, *Boundary–field equation methods for a class of nonlinear problems*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 331. Longman, 1995.
- [10] W. Hackbusch, *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*, segunda edición. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1997. Versión en inglés: International Series of Numerical Mathematics, 120. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [11] W. Hackbusch y G. Wittum, eds., *Boundary Elements: Implementation and Analysis of Advanced Algorithms*, Notes on Numerical Fluid Mechanics 54, Vieweg, Braunschweig, 1996.
- [12] F. Hartmann, *Introduction to boundary elements. Theory and applications*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.
- [13] G.C. Hsiao y R.C. MacCamy, Solution of boundary value problems by integral equations of the first kind, *SIAM Rev.* 15 (1973) 687–705.
- [14] R. Kress, *Linear Integral Equations*, 2nd ed. Applied Mathematical Sciences, 82. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [15] S. Kirkup, *The Boundary Element Method in Acoustics*, Integrated Sound Software, 1998.
- [16] V.G. Maz'ya, Boundary integral equations, En: *Analysis IV* (pp. 127–222) Enciclopedia of Mathematical Sciences 27, Springer–Verlag, 1991
- [17] W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, 2000.
- [18] S.G. Mikhlin, *Mathematical Physics, an Advanced Course*, North–Holland, Amsterdam-London, 1970.
- [19] S.G. Mikhlin y S. Prössdorf, *Singular integral operators*, Springer Verlag, Berlin-New York, 1986.
- [20] J.C. Nédélec *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*. Lecture Notes, Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique, Palaiseau, Francia, 1977.

- [21] J.-C. Nédélec et al. Équations intégrales associées aux problèmes aux limites elliptiques dans des domaines de \mathbb{R}^3 y Approximation des équations intégrales par éléments finis.. Capítulos XI y XIII de R. Dautray y J.L Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, París, 1988. Edición en inglés: Volumen 4. Springer–Verlag, Berlin, 1990.
- [22] S. Prössdorf y B. Silbermann *Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations*, Akademie–Verlag, Berlin, 1991. También *Operator Theory: Advances and Applications*, 52, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
- [23] I.H. Sloan, Error analysis of boundary integral methods, en: *Acta Numerica 1992* A. Iserles, ed. (pp. 287–339) Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [24] I.H. Sloan, Unconventional methods for boundary integral equations in the plane. En: *Numerical analysis 1991 (Dundee, 1991)*, D.F. Griffiths y G.A. Watson, eds. (pp. 194–218) Pitman Res. Notes Math. Ser., 260, Longman Sci. Tech., Harlow, 1992.
- [25] I.H. Sloan, Boundary Element Methods, en: *Theory and numerics of ordinary and partial differential equations (Leicester, 1994)*, M. Ainsworth et al., eds. (pp. 138–180) Adv. Numer. Anal., IV, Oxford Univ. Press, New York, 1995.
- [26] G. Vainikko, *Periodic integral and pseudodifferential equations*, Helsinki Univ. Technology, Institute of Mathematics, 1996, Research Report C13.
- [27] W.L. Wendland, Boundary element methods and their asymptotic convergence. En: *Theoretical acoustics and numerical techniques, CISM Courses*, 277, P. Filippi, ed. (pp. 135–216) Springer, Viena, 1983.
- [28] W.L. Wendland, Boundary element methods for elliptic problems. En: *Mathematical theory of finite and boundary element methods*, A. Schatz, V. Thomée y W.L. Wendland, eds. (pp.219–276) Birkhäuser, Basel, 1990.
- [*] **Artículos y otras referencias**
- [29] M. Abramowitz y I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, 1972.

- [30] D.N. Arnold y W.L. Wendland, On the asymptotic convergence of collocation methods, *Numer. Math.* 41 (1983) 349–381.
- [31] D.N. Arnold y W.L. Wendland, The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations on curves, *Numer. Math.* 47 (1985) 317–341.
- [32] R. Celorrio y F.-J. Sayas, Full collocation methods for some boundary integral equations, *Numer. Algorithms* 22 (1999) 327–351.
- [33] R. Celorrio y F.-J. Sayas, Extrapolation techniques and the collocation method for a class of boundary integral equations, to appear in *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*.
- [34] M. Crouzeix y F.-J. Sayas, Asymptotic expansions of the error of spline Galerkin boundary element methods, *Numer. Math.* 78 (1998) 523–547.
- [35] M. Costabel, Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results, *SIAM J. Math. Anal.* 19 (1988) 613–636.
- [36] M. Costabel, Boundary integral operators for the heat equation. *Integral Equations Operator Theory* 13 (1990) 498–552.
- [37] V. Domínguez y F.-J. Sayas, Full Asymptotics of spline Petrov–Galerkin methods for periodic pseudodifferential equations, *Publ. Sem. G. Galdeano* 2, Univ. Zaragoza, 2000, preprint.
- [38] G.C. Hsiao, P. Kopp y W.L. Wendland, A Galerkin collocation method for some integral equations of the First Kind, *Computing* 25 (1980) 89–130.
- [39] G.C. Hsiao, P. Kopp y W.L. Wendland, Some Applications of a Galerkin–collocation method for boundary integral equations of the first kind, *Math. Methods Appl. Sci.* 6 (1984) 280–325.
- [40] G.C. Hsiao y W.L. Wendland, A finite element method for some integral equations of the first kind, *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977) 449–481.

- [41] G.C. Hsiao y W.L. Wendland, The Aubin–Nitsche lemma for integral equations, *J. Integral Equations* 3 (1981) 299–315.
- [42] M.-N. Le Roux, *Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan par une méthode variationnelle d'éléments finis*, Thèse de troisième cycle, Université de Rennes, France, 1974.
- [43] W. McLean, Fully–discrete collocation methods for an integral equation of the first kind, *J. Integral Equations Appl.* 6 (1994) 537–571.
- [44] H. Multhopp, Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln, *Luftfahrt–Forschung* 15 (1938) 153–169.
- [45] J. Saranen, The Convergence of even degree spline collocation solution for potential problems in smooth domains of the plane, *Numer. Math.* 53 (1988) 490–512.
- [46] J. Saranen, On the effect of numerical quadrature in solving boundary integral equations, *Notes on Numerical Fluid Mechanics* 21, Vieweg (1988) 196–209.
- [47] J. Saranen, Extrapolation methods for spline collocation solution of pseudo-differential equations on curves, *Numer. Math.* 56 (1989) 385–407.
- [48] J. Saranen y W.L. Wendland, On the asymptotic convergence of collocation methods with spline functions of even degree, *Math. Comp.* 45 (1985) 91–108.
- [49] F.-J. Sayas, Fully discrete Galerkin methods for systems of boundary integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* 81 (1997) 311–331.
- [50] F.-J. Sayas, The numerical solution of Symm's equation on smooth open arcs by spline Galerkin methods, *Comput. Math. Appl.* 38 (1999) 87–99.
- [51] G. Schmidt, The convergence of Galerkin and collocation methods with splines for pseudodifferential equations on closed curves, *Z. Anal. Anwendungen* 3 (1984) 371–384.
- [52] G. Schmidt, On ε -collocation for pseudodifferential equations on a closed curve, *Math. Nachr.* 126 (1986) 183–196.

- [53] I.H. Sloan y A. Spence, The Galerkin method for integral equations of the first kind with logarithmic kernel: Theory, *IMA J. Numer. Anal.* 8 (1988) 105–122.
- [54] I.H. Sloan y A. Spence, The Galerkin method for integral equations of the first kind with logarithmic kernel: Applications, *IMA J. Numer. Anal.* 8 (1988) 123–140.
- [55] E.P. Stephan y W.L. Wendland, Remarks to Galerkin and least squares methods with finite elements for general elliptic problems, in: *Partial differential equations*, Lecture Notes in Mathematics 564, Springer–Verlag (1976) 461–471, y en *Manuscripta Geodaetica* 1 (1976) 93–123.
- [56] Y. Yan, Cosine change of variable for Symm’s integral equations on open arcs, *IMA J. Numer. Anal.* 10 (1990) 549–579.
- [57] Y. Yan y I.H. Sloan, On integral equations of the first kind with logarithmic kernel, *J. Integral Equations. Appl.* 1 (1988) 549–579.
- [58] Y. Yan y I.H. Sloan, Mesh grading for integral equations of the first kind with logarithmic kernel, *SIAM J. Numer. Anal.* 26 (1989) 574–587.